双曲線関数の世界入門

明松 真司

2017 年 9 月 23 日

目次

1　双曲線関数

双曲線関数 (hypabolic function) とは、次のように定義される 3 つの関数のことです[*1]。

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

例えば高専の教科書なんかを読んでいると、微積の教科書で一瞬だけ、申し訳程度に現れて、うへー、なんだこの関数... と、みんなに忘れ去られて行くのがこの双曲線関数です。ところが、この関数は、我々が普段「かゆくて手が届かない問題」を見事に解決してくれる、すんばらしい性質をたくさん持っています。ところが、僕はこの関数についてじっくりと掘り下げた教材を、あんまり見たことがないのです。だから、作ってみようと決めてこの文書を書くことにしました。「おっ、双曲線関数って、なんかすげーじゃん！」と思ってくださる方が一人でもいらっしゃれば、この上なき幸せです。

2　双曲線関数とはそもそも何なのか

ていうかそもそも、なんで双曲線関数ってもんをそうやって定義するの？って疑問が最初に湧いてくることと思います。双曲線関数をこういうふうに定義する理由は色々あるのですが、一番分かりやすいのを説明しておきましょう。**オイラーの公式 (Euler's formula)** を思い出してみてください。三角関数と指数関数が虚数を媒介してつながってしまうという、すごい公式です。

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

さて、この 2 つの形のオイラーの公式、両辺をそれぞれ足して見ましょう。

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x.$$

両辺を 2 で割って、$\cos x$ について解いてみると、

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

[*1] ちなみに、「はいぱぼりっくこさいん」「はいぱぼりっくさいん」「はいぱぼりっくたんじぇんと」と読みます。

こんな感じで、$\cos x$ を指数関数によって表した、cos **の指数表示**が得られました。ほぼ同様の手順で、sin についても、次の**指数表示**が得られます。

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

こんなふうに、オイラーの公式により、三角関数は、指数関数＋虚数を使って表すことができます。また、$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ なので、さっきの指数表示を使って次の tan の指数表示も得られます。

$$\tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}.$$

これ見ると「あからさまに双曲線関数の定義に似てるな」って思いませんか。そうなんです。双曲線関数のあの定義は、いわば**「指数表示のマネッコ」**なのです。つまり...

- 三角関数は、指数関数をつかって「指数表示」できる。
- 「三角関数の指数表示」には虚数が入ってるんだけど、虚数入ってるとなんかめんどくさそうだから、虚数を外してみよう。
- 虚数を外したから当然三角関数とは違う関数にはなるけど、いわば「三角関数っぽい」、これはこれで面白い関数になるんじゃゃね？→**双曲線関数の定義**。

こんな感じのモチベーションで出てくる関数だと思っておけば、とりあえずは、大丈夫です[*2]。

重要ポイント

双曲線関数の定義は、三角関数の指数表示の「真似っこ」。だから、三角関数とは違うんだけど、三角関数っぽい性質は持っていそう。

3　双曲線関数の世界と、三角関数の世界

双曲線関数は、いわば「三角関数モドキ」だったわけですから、三角関数と似たような性質を持っていそうだなぁ、ということはなんとなく想像できると思います。まさにそうなのです。我々は「三角関数の公式」をいろいろ知っています

[*2] 本当は、もっと厳密なモチベーションがあったりとかします。が、まぁ、あんまり深入りしても大変なだけなので、今は「あぁ、三角関数の指数表示の真似ね」くらいの感じで捉えていただければ、困ることはありません。もし定義の厳密な導出過程を知りたい！という方がいたら、まぁ Wikipedia あたりで調べてください。

が、だいたいそれらにはほぼ間違いなく、**「双曲線関数 ver」**が存在します。つまり、「三角関数の世界」に存在する公式は、「双曲線関数の世界」にも、(ちょっとだけ形をかえて) 対応して存在しているのです。まず最初に、それらをじっくりと対比して眺めてみることから始めてみましょう。

重要ポイント

三角関数の公式には、「双曲線関数 ver」が存在する!!

4 双曲線関数の公式

それでは、実際にいろんな「三角関数の公式」の、「双曲線関数 ver」を見てみましょう。

「オイラーの公式」双曲線関数 ver

$$e^{\pm x} = \cosh x \pm \sinh x. \quad (\text{複号同順})$$

確かに似てますね。これの証明は簡単です。

証明.

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \cosh x \pm \sinh x \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \pm \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{(e^x \pm e^x) + (e^{-x} \mp e^{-x})}{2} \\ &= e^{\pm x} = \text{左辺}. \end{aligned}$$

この「オイラーの公式」双曲線関数 ver が、すべての公式の出発点となります。

「加法定理」双曲線関数 ver

$$\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh\alpha\cosh\beta \pm \sinh\alpha\sinh\beta \quad (\text{複号同順})$$

$$\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh\alpha\cosh\beta \pm \cosh\alpha\sinh\beta \quad (\text{複号同順})$$

$$\tanh(\alpha \pm \beta) = \frac{\tanh\alpha \pm \tanh\beta}{1 \pm \tanh\alpha\tanh\beta} \quad (\text{複号同順})$$

なんと、「加法定理」が成り立ちます。これもよく見るとですが、「三角関数の加法定理と形はほぼ同じだけど、ちょっとだけ符号が違うところが」ありますね。この類似、なかなか面白くないっすか。

証明.
オイラーの公式（双曲線関数 ver）から始めましょう。オイラーの公式（三角関数 ver）から三角関数の加法定理を導く方法は有名ですが、それをそのまま真似します。

$$e^{\pm(\alpha+\beta)} = \underbrace{\cosh(\alpha+\beta)}_{(1)} \pm \underbrace{\sinh(\alpha+\beta)}_{(2)}.$$

いっぽうで、左辺を指数法則で積に分けてそれぞれにオイラーの公式（双曲線関数 ver）を適用すると、

$$\begin{aligned}
e^{\pm(\alpha+\beta)} &= e^{\pm\alpha}e^{\pm\beta} \\
&= (\cosh\alpha \pm \sinh\alpha)(\cosh\beta \pm \sinh\beta) \\
&= \cosh\alpha\cosh\beta \pm \cosh\alpha\sinh\beta \pm \sinh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta \\
&= \underbrace{(\cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta)}_{(i)} \pm \underbrace{(\cosh\alpha\sinh\beta + \sinh\alpha\cosh\beta)}_{(ii)}.
\end{aligned}$$

これで、cosh と sinh の加法定理の $\alpha+\beta$ のほうを導出できました。$\alpha-\beta$ のほうも、同じようにして導けます。

また、tanh の加法定理も、三角関数のときと同じように、

$$\tanh(\alpha \pm \beta) = \frac{\sinh(\alpha \pm \beta)}{\cosh(\alpha \pm \beta)}$$

から始めて、分母と分子を加法定理で展開→分母と分子を同時に $\cosh\alpha\cosh\beta$ で割るという方法で導けます（あとは任せた）。

ということで加法定理が出てきました。さらには、三角関数のときは加法定理と並んで重要だった「三角関数の相互関係」の双曲線関数 ver**「双曲線関数の相互関係」**も存在します。

「双曲線関数の相互関係」

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1\\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}\\ 1 - \tanh^2 x &= \frac{1}{\cosh^2 x}\end{aligned}$$

三角関数には「2 乗して足すと 1」という性質がありましたが、なるほど双曲線関数には「2 乗して引くと 1」という性質があるのですね[*3]。三角関数では、この「相互関係」、そして「加法定理」がきわめて重要な役割を持っているのでした。それと同じように、双曲線関数でもこの 3 本の式が大きな威力を発揮します。特に 1 本目。

---

*3 【ちょっと小難しい話】三角関数のときは、「単位円 $x^2+y^2=1$ 上に偏角 θ の動径をとって、その動径と単位円の交点の x 座標と y 座標」を、それぞれ $\cos\theta, \sin\theta$ と定義しました。そういう意味で、相互関係の 1 つ目の式「2 乗して足すと 1」が成り立つのは当たり前だったのです。

双曲線関数のかなり原始的な定義方法として、これの真似を $x^2-y^2=1$（双曲線!!）を使ってやるのというのがあります（この資料で採用している定義とは別の方法です）。具体的には、原点から双曲線上に動径（のようなもの）を伸ばし、さらに、その動径の偏角 (のようなもの) θ を定義します。そして、その時の双曲線との交点の x, y 座標をそれぞれ $\cosh\theta, \sinh\theta$ と定義するのです。このような立場に立ったとき、双曲線関数が「2 乗して引いて 1」という性質を持つのは、当たり前の事柄です。

証明.
まず1本目の式ですが、オイラーの公式双曲線関数 ver よりすぐにわかります。

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \cosh^2 x - \sinh^2 x \\
&= (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) \\
&= e^x e^{-x} \quad (\text{「オイラーの公式」双曲線関数 } ver \text{ より}) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

2本目は、tanh の定義から明らかです。また、3本目の式については、1本目の式の両辺を $\cosh^2 x$ で割ると、

$$\begin{aligned}
1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} &= \frac{1}{\cosh^2 x} \\
1 - \tanh^2 x &= \frac{1}{\cosh^2 x}
\end{aligned}$$

という具合に、すぐに証明できました。

さて、「加法定理」と「相互関係」を出発点として、三角関数のときはあらゆる定理が導出されました。双曲線関数も、もちろんそれと同じことが起こります。

「2倍角の公式」双曲線関数 ver

$$\begin{aligned}
\cosh 2\alpha &= 1 + 2\sinh^2 \alpha. \\
&= 2\cosh^2 \alpha - 1. \\
\sinh 2\alpha &= 2 \sinh \alpha \cosh \alpha.
\end{aligned}$$

三角関数のときと同様に、「加法定理で $\alpha = \beta$ の場合」を考えます。

証明

$$
\begin{aligned}
\cosh 2\alpha &= \cosh(\alpha+\alpha) \\
&= \cosh\alpha\cosh\alpha + \sinh\alpha\sinh\alpha \\
&= \cosh^2\alpha + \sinh^2\alpha \quad \cdots (*)
\end{aligned}
$$

ここで、相互関係の 1 本目の式により、$\cosh^2\alpha = 1 + \sinh^2\alpha$ なので、代入して整理すると、

$$\cosh 2\alpha = 1 + 2\sinh^2\alpha.$$

さらに、$(*)$ に $\sinh^2\alpha = \cosh^2\alpha - 1$ を代入して整理すると、

$$\cosh 2\alpha = 2\cosh^2\alpha - 1.$$

も得られる。sinh についても全く同様のアイデアで、

$$
\begin{aligned}
\sinh 2\alpha &= \sinh(\alpha+\alpha) \\
&= \sinh\alpha\cosh\alpha + \cosh\alpha\sinh\alpha \\
&= 2\sinh\alpha\cosh\alpha.
\end{aligned}
$$

「半角の公式」双曲線関数 ver

$$
\begin{aligned}
\cosh^2\alpha &= \frac{\cosh 2\alpha + 1}{2} \\
\sinh^2\alpha &= \frac{\cosh 2\alpha - 1}{2}
\end{aligned}
$$

半角の公式は、最初のうちこそ存在感のない公式ではありますが、積分においては絶大な威力を発揮します。というのも、「2 乗」を消す力があるからです。2 乗が消えると、積分って劇的にしやすくなるのですよ。

証明

cosh の半角の公式の 2 本の式を、それぞれ $\cosh^2 \alpha, \sinh^2 \alpha$ について解けばすぐに得られます。

さらに、微分公式も確認しておきましょう。

双曲線関数の微分公式

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$
$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$
$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

三角関数は、cos を微分するとマイナスがくっついて sin になるのでした。ところが、双曲線関数は微分をしてもマイナスがくっつくことはありません。ですので、

- 三角関数は「微分 4 回」で一巡してもとに戻る。
- **双曲線関数は「微分 2 回」で一巡してもとに戻る。**

という性質を持ちます。証明は、定義に戻ればすぐにできるので省略しますね。
また、この微分公式により次の積分公式が得られます。

双曲線関数の積分公式

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$
$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$
$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + C$$

ほらね。三角関数の主要な公式と対応する、双曲線関数の公式がいつも作れるでしょ？面白いですよね。例えば、以下のような公式についても、対応する双曲線関数の公式を導いてみると面白いと思います。

- 3 倍角の公式
- ド・モアブルの公式
- 積和変換の公式

5　逆双曲線関数

双曲線関数は指数関数によって定義されます。ということは、逆関数が対数関数を使って書けるんじゃね？というアイデアが自然と生まれますね。このセクションでは、「双曲線関数の逆関数を対数関数で書くとどういう形になるか」ということを調べてみたいと思います。

双曲線関数の逆関数を、三角関数のときと同じように以下のようにあらわすことにしましょう。

$$\cosh^{-1} x, \sinh^{-1} x, \tanh^{-1} x.$$

で、これまた三角関数のときと同じように、それぞれ「アークハイパボリックコサイン」、「アークハイパボリックサイン」、「アークハイパボリックタンジェント」と呼ぶことにします。この辺の呼び方については、人によって違ったりするのでお気をつけ下さい。実はこれらの関数は、以下のように「対数表示」をすることが出来ます。

逆双曲線関数の対数表示

$$
\begin{aligned}
\cosh^{-1} x &= \log\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right). \\
\sinh^{-1} x &= \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right). \\
\tanh^{-1} x &= \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}.
\end{aligned}
$$

見ただけでは「ん？」という式かもしれないですが、要するに「双曲線関数が指数関数で計算できるなら、その逆関数は対数関数で計算できるはず！」という、至極当たり前のアイデア。この表示ができることを実際に証明してみましょう。

証明.

$x = \cosh y$ と置きます。$y = f(x)$ と表せれば、それが cosh の逆関数です。

$$\begin{aligned} x &= \cosh y \\ &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \\ 2x &= e^y + e^{-y} \\ 2xe^y &= (e^y)^2 + 1 \\ (e^y)^2 - 2xe^y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

e^y についての 2 次方程式が得られたので、2 次方程式の解の公式を使うと、

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

両辺の自然対数をとると、

$$y = \log\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

これで示せました。sinh についてもほぼ同様の手順で示せます (log の真数条件より、e^y のマイナスのほうの解が不適となり除外されることだけは注意)。tanh については、証明してみましょう。$x = \tanh y$ と置きます。

$$\begin{aligned} x &= \tanh y \\ &= \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \\ xe^y + xe^{-y} &= e^y - e^{-y} \\ (x-1)(e^y)^2 + (x+1) &= 0 \\ (e^y)^2 &= \frac{1+x}{1-x} \\ e^y &= \pm\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \end{aligned}$$

両辺の自然対数をとると (ただし、マイナスのほうは真数条件より不適)、

$$y = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}.$$

ちなみに、cosh だけは逆関数が 1 対 2 対応になっています（x を 1 つ決めると y が 2 つ決まる）。これはいわば、$y = x^2$ の逆関数が $y = \pm\sqrt{x}$ となるようなものだと思えばそんなの不思議な結果ではないでしょう。

6　「$1 + x^2$」が現れる積分

双曲線関数がその真価を発揮するタイミングの一つに、積分の計算があります。

ちょっと復習をしましょう。例えば、以下のような不定積分を計算したいとします。

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

このような不定積分はちょっとテクニカルな置換積分を用いると計算することが出来ます。というのも、分母のルートの中の「$1 - x^2$」に着目し、**「あ、$x = \sin t$ とおけば、$1 - \sin^2 t = \cos^2 t$ というふうに、項が 1 つにまとまって簡単になる!!」**というモチベーションで $x = \sin t$ という置換積分を行うのでした。実際にこの不定積分は、以下のように計算することが出来ます。

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t dt \quad (x = \sin t) \\
&= \int \frac{1}{\cos t} \cos t dt \\
&= \int dt \\
&= t + C \\
&= \sin^{-1} x + C. \quad (x = \sin t \text{ だから } t = \sin^{-1} x)
\end{aligned}$$

さて、ここで、今度は次のような不定積分を考えてみます。

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

この不定積分を計算するとき、先程のように「$x = \sin t$」は使えません。なぜなら、根号の中身がまとまって簡単になってくれないからです。そこで、よくこういう不定積分を処理するときは、三角関数の相互関係のうち、

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

を思い出して、$x = \tan t$ と置換する、というアイデアが使われるのです。しかし、我々はこの資料で「双曲線関数」について学びました。その知識があれば、実は次のようなアイデアにたどり着くのです。

6.1　双曲線関数による置換積分

　双曲線関数の相互関係のうち、次の式を思い出します。

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

変形すると、

$$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x.$$

これを見ると、おやっと思うわけです。

> $x = \sinh t$ と置換すれば、$1 + x^2 = 1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t$ という流れで、$1 + x^2$ が 1 つの項にまとまる!!

そう、ここで我々は新たな置換積分「$x = \sinh t$」にたどり着くことができました。実際に置換してみましょう。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx &= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 t}}\cosh t dt \quad (x = \sinh t, dx = \cosh t dt)\\ &= \int \frac{1}{\cosh t}\cosh t dt\\ &= \int dt\\ &= t + C.\end{aligned}$$

なななんと。驚くほど簡単な結果にたどり着きました。あとは簡単です。$x = \sinh t$ だったので $t = \sinh^{-1} x$ でした。$\sinh^{-1} x$ を対数表示を使って表せば、次の積分公式が得られます。

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.$$

ちなみにこの積分。高専や大学で使う教科書を見たり、高専や大学の授業を見たりすると、「はい、覚えなさいよ〜テストに出るよ〜」で済ませられてしまうことが何だか多い公式なのですが、もう覚える必要なんてないですね。置換積分で導いてしまえば良いのです。

　続けて、もうひとつ積分を計算してみましょう。今度はこっち。

$$\int \sqrt{1+x^2}dx.$$

これも、さっきと全く同じアイデアで、$x = \sinh t$ という置換積分をすればよさそうです。

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}dx &= \int \sqrt{1+\sinh^2 t}\cosh t dt \quad (x = \sinh t, dx = \cosh t dt) \\ &= \int \cosh^2 t dt \\ &= \int \frac{\cosh 2t + 1}{2} dt \quad (「半角の公式」双曲線関数\ ver) \\ &= \frac{1}{2}\int \cosh 2t dt + \frac{1}{2}\int dt \\ &= \frac{1}{4}\sinh 2t + \frac{t}{2} + C \\ &= \frac{1}{2}\{\sinh t \cosh t + t\} + C. \quad (「2\ 倍角の公式」双曲線関数\ ver)\end{aligned}$$

さてさて、$x = \sinh t$ でした。$\cosh t$ を x で書き直すためには、以下のように考えます。

$$\begin{aligned}\cosh^2 t &= 1 + \sinh^2 t \\ &= 1 + x^2 \\ \cosh t &= \sqrt{1+x^2}.\end{aligned}$$

よって、結局、

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}dx &= \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1} x\right\} + C \\ &= \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2} + \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right\} + C.\end{aligned}$$

というふうに、積分がきっちり計算できました (ちょっと大変だったけど)!!

この積分公式も、「はい、覚えてね〜」で終わってしまいがちな積分だと個人的には思います。しかしながら、こういうふうに双曲線関数の性質をフル活用して、見事に積分公式が導出されてしまう過程は、なんとも味わい深く、そして面白いなぁと個人的に思います。$x = \tan t$ による導出過程と見比べて、どういう違いがあるか、どっちにどういう利点があるかをじっくり調べてみるのも、これまた楽しめると思いますよ。

7 おわりに

この資料は、実はずーっと作りたいなぁと頭のなかでぼんーやり思っていたのです。というのも、僕は今、高専向けの学習塾をやっていて、よく学生に微分積分を教えるので

すけど、高専の微分積分の教科書、双曲線関数が「わずか数行」しか登場しないのですよ(しかも、演習問題の中の１問という立ち位置でだけ...)。

まぁ確かに、双曲線関数を経由せずとも、高専の微分積分のカリキュラムを駆け抜けることは出来ます。でも、せっかくこんなに魅力的で面白くて、そして役立つ関数を、まっっったくフューチャーしないのは勿体無いよなぁ、という理由で、ずっと、自分がその部分を補填できればということを考えていました。やっとこさ作り終えるまでけっこうな時間を要してしまいましたが、双曲線関数を必要とするあなたのお役にこの資料が立てていれば本当に嬉しいということに加えて、自分自身にとっても役立つリファレンスが出来たなと思っています。

双曲線関数の性質、いろいろ挙げましたけど、こんなんまだ、鍵穴から覗いた程度の話です。例えば、双曲線関数の「x, y 座標としての」定義の話、そして、双曲線関数の「微分方程式の解」としての定義など。さらには、グラフの話だったり、ぶらさがり曲線の話だったり。掘り下げればきりがありません。もしこの資料で双曲線関数に興味をもって頂くことができたなら、是非とも新たな深みへと歩みを進めていただいて、そして、そこで得た知識を今度は僕にレクチャーしてほしいという願いをここに綴った上で、この資料の結びの一言とさせていただければと思います。ありがとうございました！