線形漸化式の一般項

2 項間線形漸化式, 3 項間線形漸化式

2011 年 7 月 29 日

1　2 項間線形漸化式

$$a_{n+1} = pa_n + q \quad (p \neq 1)$$

という形の漸化式を **2 項間線形漸化式** という．この形の漸化式の一般項は, 決まった手順に従って求めることができる．常に意識しておいてほしいスローガンは, **等比数列の問題に帰着する**ということである．

1.1　等比数列の一般項

等比数列は, 次のような漸化式により表される数列である．

$$a_{n+1} = ra_n.$$

ここで, a_0 を**初項**, r を**公比**といった．等比数列の一般項は, 以下のように表させることがすぐに分かる．

$$a_n = a_0 r^{n-1}. \quad (\text{初項に公比を } n-1 \text{ 回かけると}, n \text{ 項目になる})$$

この結果を応用して, もっと複雑な漸化式の一般項を求めることができる．

1.2　2 項間線形漸化式

$$a_{n+1} = pa_n + q. \quad (p, q \text{ は定数})$$

の一般項を求めたい．しかし, この形の漸化式の一般項をパッとすぐに求めることはできない．しかし, **ある手順を踏んで等比数列の問題に帰着する**ことにより, 一般項を求めることができる．その手順を説明しよう．

$$x = px + q. \quad (a_{n+1}, a_n \text{を } x \text{ に置き換えた方程式})$$

を, 上の漸化式の**特性方程式**という．漸化式とこの特性方程式の辺々を引いてみよう．

$$a_{n+1} - x = p(a_n - x).$$

このように, 定数部分が上手い具合に消去された新たな漸化式が得られる．ここで $b_n = a_n - x$ と置けば,

$$b_{n+1} = pb_n.$$

という漸化式を得る．何と, **等比数列に帰着**することが出来た．この漸化式の一般項は最初に述べた通り,

$$b_n = b_0 p^{n-1}.$$

である．ここで, $b_n = a_n - x$ より, $b_0 = a_0 - x$ で,

$$a_n = (a_0 - x)p^{n-1} + x.$$

を得る．以上の手順により, 2 項間線形漸化式の一般項を求めることができた．ちなみに, 特性方程式の解 x を具体的な形で求めてみよう．

$$x = px + q.$$

を x について解くと $x = \dfrac{q}{1-p}$ を得るので, これを代入すれば,

$$a_n = \left(a_0 - \frac{q}{1-p}\right)p^{n-1} + \frac{q}{1-p}.$$

を得る．これが, **2 項間線形漸化式の一般項の公式**である (が, 覚える必要はない)．ちなみに 最初に $p \neq 1$ を仮定したが, $p = 1$ の場合は, 上の漸化式は**等差数列**を表す．等差数列の一般項はすぐに求めることができるので, これで全ての p の場合についての一般項の求め方が分かったことになる．

2 3 項間線形漸化式

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n. \quad (p, q \text{ は定数})$$

という形で表される漸化式を, **3 項間線形漸化式**という．この形の線形漸化式も, **特性方程式を用いて等比数列の問題に帰着**することで一般項を求めることができる．この形の漸化式の特性方程式は,

$$x^2 = px + q.$$

という二次方程式として定義される (なぜこのような特性方程式を解くのか？については後述)．この方程式の 2 つの解を α, β と置くと, この α, β を用いて上の漸化式は次の 2 通りに変換することができる．

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta\left(a_{n+1} - \alpha a_n\right) \ \cdots \ (1) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha\left(a_{n+1} - \beta a_n\right) \ \cdots \ (2). \end{cases}$$

(1) について, $b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ と置こう．すると, (1) は

$$b_{n+1} = \beta b_n.$$

と書けて, これは**等比数列**である．よって, 一般項 b_n は,

$$b_n = b_0 \beta^{n-1}.$$

$b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ を思い出して変形すれば,

$$a_{n+1} - \alpha a_n = a_1 \beta^{n-1} - \alpha a_0 \beta^{n-1} \cdots (*).$$

(2) について, $c_n = a_{n+1} - \beta a_n$ と置こう．すると, (1) は

$$c_{n+1} = \alpha c_n.$$

と書けて, これは**等比数列**である．よって, 一般項 c_n は,

$$c_n = c_0 \alpha^{n-1}.$$

$c_n = a_{n+1} - \beta a_n$ を思い出して変形すれば,

$$a_{n+1} - \beta a_n = a_1 \alpha^{n-1} - \beta a_0 \alpha^{n-1} \cdots (**).$$

あとは, (*)-(**) 計算しよう．すると, a_{n+1} が上手く消えて,

$$\begin{aligned}(\beta - \alpha) a_n &= (\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) a_1 - \left(\alpha \beta^{n-1} - \beta \alpha^{n-1}\right) a_0 \\ a_n &= \frac{\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}}{\beta - \alpha} a_1 - \frac{\alpha \beta^{n-1} - \beta \alpha^{n-1}}{\beta - \alpha} a_0. \\ &= \frac{a_1 - a_0 \alpha}{\beta - \alpha} \beta^{n-1} - \frac{a_1 - a_0 \beta}{\beta - \alpha} \alpha^{n-1}.\end{aligned}$$

これが, **3 項間線形漸化式の一般項の公式**である (ただし, $\alpha, .\beta$ は特性方程式の 2 つの解である)．この公式も当然ながら覚える必要は無い.

2.1 特性方程式の理由

ちなみに, $a_{n+2} = p a_{n+1} + q a_n$ の特性方程式が $x^2 = px + q$ と表され, この解を用いることによりうまく問題をとくことができるのかを考えよう．最初に掲げたスローガン「**等比数列の一般項に帰着する**」を思い出そう．3 項間線形漸化式についても, 等比数列の問題にどうにかして帰着できないだろうかと考える．そこで, 漸化式がある α, β を用いて次のように変形できたとしよう.

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta \left(a_{n+1} - \alpha a_n\right)$$

なぜこのような形に変形できたとするかというと, $b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ と置くことにより, **等比数列に帰着**できるからである．さて, この式を変形すると, 次の形にすることができる.

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta) a_{n+1} - \alpha \beta a_n.$$

もとの漸化式とこの式の各係数を比較すると,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = p \\ \alpha \beta = -q. \end{cases}$$

この α, β についての連立方程式をよく見ると, α, β は **2 次方程式の解と係数の関係**を使って, 次の 2 次方程式の解であることが分かる.

$$x^2 - px - q = 0.$$

この方程式を変形すると,

$$x^2 = px + q.$$

この式は, 最初の漸化式において a_{n+2}を x^2, a_{n+1}を x, a_nを 1 に形式的に置き換えることにより得られる方程式と全く同じであることが分かる．すなわち,

1. 特性方程式 $x^2 = px + q$ を解いて, 解 α, β を得る.
2. その α, β を使うと, うまく漸化式を等比数列の形に変形できる.

ということである．これにより, 特性方程式がなぜあのような形になるのか, が分かった.