

## 2 次方程式の基本解法

<http://haikara-city.com/>

### 1 平方根を利用した解法

2 次方程式の解法でもっとも基本的なのは、**平方根を利用した解法**です。「二乗して〇になるのは  $\pm\sqrt{\text{〇}}$  の 2 つの数」というアイデアをそのまま使って 2 次方程式が解けることがあります。

**例題**  $(x-1)^2 = 3$  を解きなさい。

$$\begin{aligned}(x-1)^2 &= 3 && \rightarrow (x-1) \text{ を 2 乗すると } 3 \\ x-1 &= \pm\sqrt{3} && \rightarrow \text{ということは } x-1 = \pm\sqrt{3} \\ x &= 1 \pm \sqrt{3}. && \rightarrow x = \sim \text{ の形にした。}\end{aligned}$$

1 行目から 2 行目への変形では、**両辺の平方根をとる (2 乗をはずす)** という操作をしています。このとき、**± を絶対に忘れずに、「根には土がつく」と** 覚えればよいです。

1. 次の 2 次方程式を解きなさい。

(i)  $x^2 - 5 = 0$

(ii)  $(x-1)^2 = 3$

(iii)  $(x+2)^2 - 5 = 0$

(iv)  $3(x+1)^2 - 1 = 0$

## 練習問題の解答 (平方根を利用した解法)

1. (i)

$$\begin{aligned}x^2 - 5 &= 0 \\x^2 &= 5 \\x &= \pm\sqrt{5}\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 &= 3 \\x - 1 &= \pm\sqrt{3} \\x &= 1 \pm \sqrt{3}\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}(x + 2)^2 - 5 &= 0 \\(x + 2)^2 &= 5 \\x + 2 &= \pm\sqrt{5} \\x &= -2 \pm \sqrt{5}\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}3(x + 1)^2 - 1 &= 0 \\3(x + 1)^2 &= 1 \\(x + 1)^2 &= \frac{1}{3} \\x + 1 &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\x &= -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

## 2 因数分解を使った解法

平方根を使った解き方がそのまま適用できなくても、**因数分解を利用した解法**で、かなりの2次方程式を解くことができます。

**例題**  $x^2 + 3x + 2 = 0$  を解きなさい。

$$\begin{aligned}(x+1)(x+2) &= 0 && \rightarrow \text{左辺を因数分解} \\ x &= -1, -2 && \rightarrow x+1=0, x+2=0 \text{ より}\end{aligned}$$

$\bigcirc\Delta = 0 \Rightarrow \bigcirc = 0$  または  $\Delta = 0$  (すなわち「**かけて0ならどっちか0**」) ということを使って  $x$  を求めています。

**例題**  $x^2 - 4x + 4 = 0$  を解きなさい。

$$\begin{aligned}(x-2)^2 &= 0 && \rightarrow \text{左辺を因数分解} \\ x &= 2 && \rightarrow \text{解が1つしか出てこないこともある.}\end{aligned}$$

**例題**  $x^2 = 9$  を解きなさい。

$$\begin{aligned}x^2 - 9 &= 0 && \rightarrow \text{まずは } = 0 \text{ の形に変形.} \\ (x+3)(x-3) &= 0 && \rightarrow \text{そして左辺を因数分解.} \\ x &= 3, -3 && \rightarrow x+3=0, x-3=0 \text{ の解.}\end{aligned}$$

最後の問題は、平方根の考え方で  $x = \pm 3$  とすぐに解けますが、こうやって  $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$  (**和と差の積は2乗の差**) を使って解くこともできます。

1. 次の2次方程式を解きなさい。

(i)  $x^2 - 5x + 6 = 0$

(ii)  $x^2 - 13x = -30$

(iii)  $2x^2 - 4x + 2 = 0$  \*1

(iv)  $3x^2 = 21x - 30$  \*2

(v)  $10x^2 - 490 = 0$

(vi)  $x^3 + 6x^2 - 7x = 0$  \*3

\*1  $x^2$  の係数が1でなくても焦ってはだめ。両辺を2で割ってしまえば、簡単な2次方程式です。

\*2 = 0 の形になおして、両辺を割り算すれば簡単。

\*3 因数分解は **1. 共通因数でくくる**、**2. 公式を使う** という鉄則。「共通因数でくくる」という手続きを忘れがちなので気をつけて。

## 練習問題の解答 (因数分解を利用した解法)

1. (i)

$$\begin{aligned}x^2 - 5x + 6 &= 0 \\(x - 2)(x - 3) &= 0 \\x &= 2, 3\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}x^2 - 13x &= -30 \\x^2 - 13x + 30 &= 0 \\(x - 10)(x - 3) &= 0 \\x &= 10, 30\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}2x^2 - 4x + 2 &= 0 \\x^2 - 2x + 1 &= 0 \\(x - 1)^2 &= 0 \\x &= 1\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}3x^2 &= 21x - 30 \\3x^2 - 21x + 30 &= 0 \\x^2 - 7x + 10 &= 0 \\(x - 2)(x - 5) &= 0 \\x &= 2, 5\end{aligned}$$

(v) (この問題は平方根を用いた解法でも解ける)

$$\begin{aligned}10x^2 - 490 &= 0 \\x^2 - 49 &= 0 \\(x - 7)(x + 7) &= 0 \\x &= 7, -7\end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned}x^3 + 6x^2 - 7x &= 0 \\x(x^2 + 6x - 7) &= 0 \\x(x + 7)(x - 1) &= 0 \\x &= 0, -7, 1\end{aligned}$$

### 3 解の公式による解法

2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) の**解の公式** (solution formula)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

を使うと、あらゆる2次方程式の解を求めることができます。しかし「じゃあ、全部解の公式で？」というようにそうではなく、解の公式を使うと計算が複雑になりがちです。ですから、

- 解の公式を使わずにとけるものは、使わずに解く。
- 他の方法ではどうしようもない場合は、**解の公式**でやっつける!!

という流れを徹底するようにしましょう。

**例題**  $2x^2 + 3x + 1 = 0$  を解きなさい。

$$\underbrace{2}_a x^2 + \underbrace{3}_b x + \underbrace{1}_c = 0 \quad \rightarrow \text{係数「a, b, c」を読み取る。}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} \quad \rightarrow \text{解の公式に代入。}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} \quad \rightarrow \text{分母と分子を計算。}$$

$$x = -\frac{1}{2}, -1 \quad \rightarrow \text{±の両方の解がでてくる。}$$

中学校の段階では、 $\sqrt{\quad}$ の中身がマイナスになることはありません。もし $\sqrt{\quad}$ の中がマイナスになったら、基本的に計算ミスを疑うようにしましょう。

1. 次の2次方程式を解きなさい。

(i)  $5x^2 - 9x + 3 = 0$

(ii)  $6x^2 - 4x - 2 = 0$

(iii)  $3x^2 - 4x - 5 = 0$

## 練習問題の解答 (解の公式による解法)

1. (i)

$$5x^2 - 9x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \times 5 \times 3}}{2 \times 5}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{10}$$

(ii)

$$6x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 6 \times (-2)}}{2 \times 6}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{12}$$

$$x = \frac{4 \pm 8}{12}$$

$$x = 1, -\frac{1}{3}$$

(iii)

$$3x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 3 \times (-5)}}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{19}}{6}$$

## 4 2次方程式の解き方を見極める

2次方程式は**解の公式**を用いると、必ず解を求めることができます。しかし、計算が面倒になりがちなので、**平方根や因数分解で解決できるときはするべき**です。つまり、2次方程式は次のような順番で解き方を決定すると良いです。

1. **平方根を用いた解き方**をできないかどうか考える。

$$\text{例: } (x+1)^2 = 3, x^2 = 5 \text{ など}$$

2. 左辺 = 0 に直して**因数分解**を使えないかどうかを考える \*4

$$\text{例: } x^2 + 2x = -1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \text{ にすれば左辺が } (x+1)^2 \text{ と因数分解できる。}$$

3. どちらも上手く行かなかったら、スパッと**解の公式**に切り替えて解く。

$$\text{例: } x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow \text{平方根の形にもできない。因数分解もできなさそう。}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

解の公式に切り替えるときは、スパッと思い切るのが重要です。

1. 次の2次方程式を解きなさい \*5。

(i)  $2x^2 = 26x - 60$

(ii)  $x^2 + 1 = 3$

(iii)  $x^2 + x - 42 = 0$

(iv)  $x^2 + 11x + 25 = 0$

(v)  $(x+2)^2 = 1 - (x+2)^2$

(vi)  $x^2 + 6x = 0$

(vii)  $x^2 + 7x = -5$

\*4 「共通因数でくくる」のも、因数分解の1つ。忘れがちだが、忘れないようにしよう。

$$\text{例: } x^3 + 5x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x+2)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 0, -2, -3.$$

\*5 この問題は**最適な解き方がランダムな形**で並んでいる。実際の試験でもこのように出題されるので、常に**最適な解き方はどれなのか**ということを念頭に、最適な解き方を選び続けたほうが、かなり時間が短縮できる。

## 練習問題の解答 (2次方程式の解き方を見極める)

1. (i)

$$\begin{aligned}2x^2 &= 26x - 60 \\2x^2 - 26x + 60 &= 0 \\x^2 - 13x + 30 &= 0 \\(x - 10)(x - 3) &= 0 \\x &= 3, 10\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}x^2 + 1 &= 3 \\x^2 &= 2 \\x &= \pm\sqrt{2}\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}x^2 + x - 42 &= 0 \\(x + 7)(x - 6) &= 0 \\x &= -7, 6\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}x^2 + 11x + 25 &= 0 \\x &= \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 100}}{2} \\x &= \frac{-11 \pm \sqrt{21}}{2}\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}(x + 2)^2 &= 1 - (x + 2)^2 \\(x + 2)^2 + (x + 2)^2 &= 1 \\2(x + 2)^2 &= 1 \\(x + 2)^2 &= \frac{1}{2} \\x + 2 &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\x &= -2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned}x^2 + 6x &= 0 \\x(x + 6) &= 0 \\x &= 0, -6\end{aligned}$$

(vii)

$$x^2 + 7x = -5$$

$$x^2 + 7x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{29}}{2}$$