

# 平方完成のやりかた

明松真司

2013年6月25日

二次関数を勉強するうえでさけて通ることのできない、**平方完成**というテクニックがある。二次式にむりやり  $( )^2$  の形を作り出すという、一見してよくわからないこのテクニックは、様々なところで驚くべき活躍をみせる。よって、平方完成のやり方は、必ずしっかりマスターしておこう。

## 1 $x$ が入っているところをくくる

例として、二次式

$$2x^2 + 4x + 1$$

を考えよう。まず最初に、以下に示すような「 $x$  が入っている部分」に着目しよう。

$$\underbrace{2x^2 + 4x}_{x \text{ が入っている}} + 1$$

最初は、この部分を  $x^2$  の係数が 1 になるようにかっこでくくろう。

$$2(x^2 + 2x) + 1$$

## 2 「2 で割った 2 乗」を足し引き

次に、以下に示す「 $x$  の係数」に着目しよう。

$$2(x^2 + 2x) + 1$$

この場合、 $x$  の係数は 2 である。今、この係数を

1. 2 で割ると 1.
2. 続けて、それを 2 乗すると 1.

という風に、 $x$  の係数を「2 で割った 2 乗」の数を計算し、これをかっこの中に足して、引こう。

$$2(x^2 + 2x \underbrace{+1 - 1}_{1 \text{ をたしてひく}}) + 1$$

### 3 引いた分をカッコから追い出す

そして次は、いま「引いた」分を、かっこの外に追い出そう\*1.

$$2(x^2 + 2x + 1) - 2 + 1$$

### 4 2乗の形ができる

さて、 $x$ が入っているカッコに注目すると、実は必ず二乗に因数分解できる形になっていることがわかる。その部分を、二乗に因数分解しよう。

$$2(x + 1)^2 - 1$$

これで、平方完成は終了である。

と、いわれても、いったい平方完成をして何がうれしいのか？という気持ちになる読者が多いだろう。実は、平方完成は実に幅広く活躍することが知られていて、例えば以下のような問題を解くときにもちいられる。

1. 二次関数のグラフの形（頂点の座標，上に凸か下に凸か）を求める。
2. 二次関数の最大値，最小値を求める\*2.
3. 因数分解できない二次方程式を解く。
4. 二次方程式の解の公式を求める（証明する）。
5. 不定積分  $\int \frac{1}{x \text{ の } 2 \text{ 次式}} dx$  を計算する\*3.

このように、いろいろな問題が平方完成をつかうと解決するが、高校では、最初の2つ（二次関数のグラフ，最大値，最小値）のために平方完成をこれでもかと使うことになるだろう。

### 5 練習問題

次の二次式を平方完成せよ。

1.  $-x^2 + 4x + 3$
2.  $2x^2 + 8x - 2$
3.  $3x^2 + 2x + 1$
4.  $-x^2 - 3x + 2$

---

\*1 かっこの外に追い出すとき、かっこについている係数をかけなければいけないことに注意！

\*2 一般に、関数の最大値，最小値を求める問題は、微分という高度なテクニックを使わなければ解けないが、二次関数に関しては平方完成を使って求めることができる。

\*3 これは非常に高度な話だが、分母を平方完成すると簡単な変数変換を行える形に帰着できて、最終的には逆正接関数を用いて不定積分をあらわせる。