漸化式の極限を求める問題の解法まとめ

2008 07/08(WED)　Presented by Minami

Quad Erat Demonstrandum? : http://ameblo.jp/dwave/

漸化式の極限を求める問題

漸化式によって定義される数列

$$a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$$

が収束することを示し, その極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

この問題には, 2 通りの解法が考えられる.

1. 数列が有界単調数列であることを示し, 両辺の a_{n+1}, a_n を,
   極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = x$ に置き換えた方程式を, x について解く.
2. 自然対数を利用する.

1. 数列が有界単調数列であることを示し, 両辺の a_{n+1}, a_n を極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = x$ に置き換えた方程式を, x について解く方法

   漸化式より, ${}^\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$, また, ${}^\forall n \in \mathbb{N},\ a_n < 2 \Rightarrow a_{n+1} < 2$ が分かる.

   $\therefore {}^\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n < 2.$

   また, $a_{n+1}2 - a_n2 = a_n(2 - a_n) > 0.$　$\therefore \{a_n\}$ は単調増加数列である.

   $\therefore \{a_n\}$ は, 上に有界な単調増加数列であるので, 収束する.

   次に, $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ とおくと, $a_n \to x,\ a_{n+1} \to x$ なので, $n \to \infty$ のとき, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ は, $x = \sqrt{2x}$ と書ける. $\therefore x = 0, 2.$ ${}^\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$ より, $\lim_{n\to\infty} a_n = x = 2$ □

2. 自然対数を利用する方法.

   $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ の両辺の自然対数をとると, $\log a_{n+1} = \frac{1}{2}\log 2a_n = \frac{1}{2}\log a_n + \frac{1}{2}\log 2.$
   $a_{n+1} = pa_n + q$ の形の漸化式の一般項の公式

   $$a_n = \frac{q}{1-p} + \left(a_1 - \frac{q}{1-p}\right)p^{n-1} \quad \text{より},$$

   $$\log a_n = \frac{\frac{1}{2}\log 2}{1-\frac{1}{2}} + \left(\log a_1 - \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \log 2 + (\log a_1 - 1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

   $n \to \infty$ のとき, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \to 0$ より, $\log a_n$は収束する.よって, a_nも収束する.

   また, $n \to \infty \Rightarrow \log a_n \to \log 2.$　$\therefore a_n \to 2$ より, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ □

お礼

解法 1 は, のるむさんからアドバイスを, 解法 2 はひろゆきさんからアドバイスを頂きました.
お二方に改めて心から感謝いたします. 本当にありがとうございました！