**2008 12/26(FRI)　Presented by Minami**

**Quad Erat Demonstrandum? : http://ameblo.jp/dwave/**

**証明する公式**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2} & (n\text{が偶数}) \\ \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\dfrac{2}{3} & (n\text{が奇数}) \end{cases}$$

proof )　$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x$ と置く.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \ \sin x dx = -[\sin^{n-1} x \ \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) \ \cos^2 x dx$$

(部分積分の公式 $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$ より)

$$= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \ (1-\sin^2 x)dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$\therefore I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$ という漸化式が得られた.

右辺の $I_n$ を左辺に移項すると,次のような漸化式に変形できる.

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

1. $n$ が偶数の場合

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}I_{n-4} = \cdots = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}I_0$$

(漸化式を用いて,再帰的に $I_n$ を $I_{n-2}, I_{n-4}\cdots$ というように下げてゆき,最終的に $I_0$ に辿り着く)

2. $n$ が奇数の場合

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}I_{n-4} = \cdots = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3}I_1$$

(漸化式を用いて,再帰的に $I_n$ を $I_{n-2}, I_{n-4}\cdots$ というように下げてゆき,最終的に $I_1$ に辿り着く)

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \quad , \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -[\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -(0-1) = 1$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2} & (n\text{が偶数}) \\ \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\dfrac{2}{3} & (n\text{が奇数}) \end{cases}$$

Q.E.D.