2008 12/25(THU)　Presented by Minami

Quad Erat Demonstrandum? : http://ameblo.jp/dwave/

求めたい不定積分

$$\int \sqrt{x^2+1}dx$$

$x=\sinh t$ とおく. $t=\mathrm{arcsinh}x$. $\dfrac{dx}{dt}=\cosh t$ より, $dx=\cosh t dt$.

$$\int \sqrt{\sinh^2 t+1}\ \cosh t dt=\int \underbrace{\sqrt{\cosh^2 t}}_{\cosh^2 t-\sinh^2 t=1}\ \cosh t dt=\int \cosh^2 t dt=\int \underbrace{\frac{1+\cosh 2t}{2}}_{\cosh^2 t=(1+\cosh 2t)/2}\ dt$$

$$=\frac{t}{2}+\frac{\sinh 2t}{4}+C=\frac{t}{2}+\underbrace{\frac{2\sinh t\cosh t}{4}}_{\sinh 2t=2\sinh t\cosh t}+C \quad \cdots \quad (*)$$

$x=\sinh t$ より, $x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$.　$e^t-2x-e^{-t}=0$

両辺に e^tをかける.　$e^{2t}-2xe^t-1=0$

これは e^tについての二次方程式なので, 解の公式を用いて e^tを求める.

$$e^t=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2+4}}{2}=\frac{2x\pm 2\sqrt{x^2+1}}{2}=x\pm\sqrt{x^2+1}.$$

左辺 $=e^t>0$ なので, $e^t=x+\sqrt{x^2+1}$.

$$\therefore t=\log|x+\sqrt{x^2+1}|\ .$$

逆双曲線関数 $\mathrm{arcsinh}x$ の対数表示

$$\mathrm{arcsinh}x=\log|x+\sqrt{x^2+1}|$$

$$\therefore (*)=\frac{\log|x+\sqrt{x^2+1}|}{2}+\frac{\sinh t\cosh t}{2}+C \quad \cdots \quad (**)$$

$x=\sinh t$ なので, $\sinh t$ はそのまま x と置き換える.

$\cosh^2 t=1+\sinh^2 t$ より, $\cosh t=\sqrt{1+\sinh^2 t}=\sqrt{1+x^2}$.

$$\therefore (**)=\frac{\log|x+\sqrt{x^2+1}|}{2}+\frac{x\sqrt{1+x^2}}{2}+C$$

$$\therefore \int\sqrt{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\{\log|x+\sqrt{x^2+1}|+x\sqrt{1+x^2}\}+C \qquad //$$