変分法の入門編

@minami106

2011 年 7 月 8 日

第 1 章

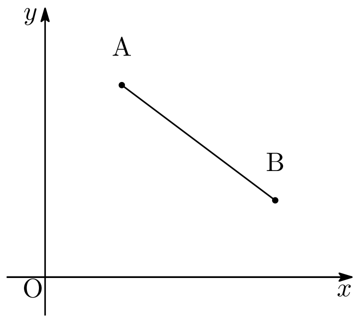
変分法

変分法という数学の分野があります．この変分法というのは, 一言で言うと**関数** $f(x)$ **の極値を** $f'(x) = 0$ **と置いて求める方法の一般化**なのですが, 数学のみならず, 解析力学などでも絶大な活躍を見せます．しかし, この変分法というのはなかなかイメージがややこしくて掴みにくく, それでいて色んなところで出現するものだから, もう困った!! どうすれば良いんだ!! と, ドツボにハマってしまうことが大いにあり得ます．そこでこの資料では, 変分法とは一体何なのか? そして, 実際にどういうことが出来るのか? について分かりやすく, それなりに厳密に説明してみようと思います.

1.1 2 点 A,B を結ぶ線分とは何だろう?

さて, 変分法というものを導入する前に, まず次のような質問の答えを考えてみてください.

平面 $\mathbb{R}^2$ の 2 点 A,B を結ぶ**線分 (segment)** とは何でしょう？



この質問に対する答えとしては, たとえば **「2 点 A,B を結ぶ曲線のうち, その長さが最短になるもの」** などが考えられます．まさにその通り．では, これを数式で表現してみましょう.

2 点 A,B$\in \mathbb{R}^2$ が与えられたとき, A,B を結ぶ曲線[*1] $\boldsymbol{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ というのは, 次のように表せます.

$$\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (a \le t \le b), \ \boldsymbol{c}(a) = \mathrm{A}, \boldsymbol{c}(b) = \mathrm{B}.$$

[*1] $\mathbb{R}^n$ の**曲線 (curve)** とは, 写像 $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ のことです.

そして, この曲線の**長さ (length)** $L(\boldsymbol{c})$ は以下のように求められるということを, 微分積分で習います[*2].

$$L(\boldsymbol{c}) = \int_a^b ||\dot{\boldsymbol{c}}(t)||dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}dt.$$

A,B を結ぶ線分とは, $L(\boldsymbol{c})$ の最小値を与えるような $\boldsymbol{c}$ のこと. と言えますね.

1.2 変分問題

この問題を少し**一般化**してみましょう. $L(\boldsymbol{c})$ は曲線 $\boldsymbol{c}$ の**長さ**を表す関数ですが, 別に長さに限らず, 曲線 $\boldsymbol{c}$ の関数 $F(\boldsymbol{c})$ を考えることができるはずです. このようにして, 以下のような問題を考えることができます.

変分問題

関数 $\boldsymbol{y} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ の関数

$$F(\boldsymbol{y}) = \int_a^b f(x, \boldsymbol{y}(x), \boldsymbol{y}'(x))dx$$

が極値を取るような $\boldsymbol{y}$ を求めよ. ただし, f は微分可能と仮定する.

さっきの曲線の長さの例は, この問題において $n = 2$, $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{c}(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$, $f(t, \boldsymbol{c}(t), \dot{\boldsymbol{c}}(t)) = \sqrt{\dot{x}(t)^2, \dot{y}(t)^2}$ の場合であることが分かると思います. これより, この問題は曲線の長さを最小にする $\boldsymbol{c}$ を求めるさきほどの問題の一般化になっていることが分かります. こういう問題のことを**変分問題 (variational problem)** と呼びます. また, F は**”関数の関数”**という, ちょっと見慣れない形をしていますよね. このような「関数の関数」のことを, **汎関数 (functional)** といいます.

最初に示した例は, 汎関数 $L(\boldsymbol{c})$ が最小の値を取るような曲線 (**関数**) $\boldsymbol{c}$ を決定する問題でした. この拡張として, 変分問題は, **汎関数 $F(\boldsymbol{y})$ が極値を取るような関数 $\boldsymbol{y}$ を決定する問題** と言うことができます.

ちなみに, 一般的に, $\boldsymbol{y}$ には, 最初の例のように, 端点を固定する境界条件 $\boldsymbol{y}(a) = \mathrm{A}, \boldsymbol{y}(b) = \mathrm{B}$ を仮定するのが普通です. これによって $\boldsymbol{y}$ は点 A から B へと向かう経路と見なすことができるようになります. たとえば, 汎関数 $F(\boldsymbol{y})$ が $\boldsymbol{y}$ に沿って A から B へ移動するのにかかるコストを表すとすれば, 変分問題は**どのような経路で A から B に移動すればコストが最小になるか？**という**最適化問題**になるわけです.

世の中には多種多様な物理現象がありますが, **驚くほど多くの物理現象が, 変分問題の解として記述されます**. このことを実感したいという読者さんには, **解析力学**という物理学の分野をオススメします ☆(ゝω・)v

1.3 関数, 汎関数の変分

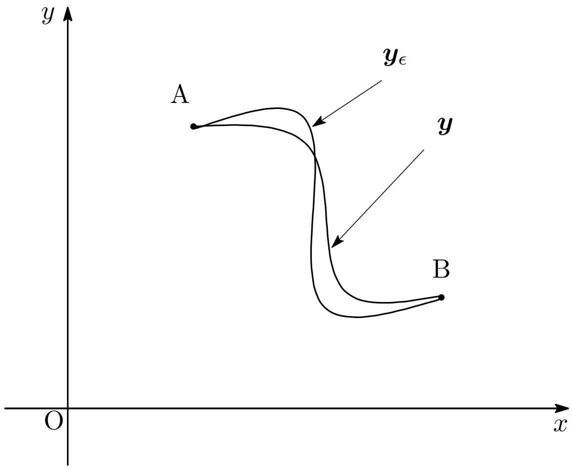
ではこれから, 変分問題を解くための道具立てをして行きましょう. まず意識しておいてほしいのは, 変分問題は**汎関数 F の極値問題**であるということです. 我々は微分積分学で**関数 $f(x)$ の極値問題**を学びました. その時我々は, $f'(x) = 0$ と置いて, f が極値を取るような x (**変数**) を決定しましたよね. ところが今我々は, 汎関数 F が極値を取るような $\boldsymbol{y}$ (**関数!**) を決定したい訳です. それを実現するために, まずは関数の場合の**微分**に相当する, 汎関数の**変分**というものを頑張って定義しましょう.

[*2] この資料では, $\frac{df}{dt}$ を $\dot{f}$ と表記します.

1.3.1 関数の変分

まずは, 汎関数 F の変分を定義するために, 関数 $\boldsymbol{y}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ の変分を定義します (変分が 2 つ出てきてややこしいですが, 気をつけて!!).

任意の関数 $\boldsymbol{h}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ (ただし, $\boldsymbol{h}(a)=\boldsymbol{h}(b)=0$ とします) を考えます. この時, 任意の実数 ϵ に対して, $\boldsymbol{y}_\epsilon(x)=\boldsymbol{y}(x)+\epsilon\boldsymbol{h}(x)$ とおけば, $\boldsymbol{y}_\epsilon(a)=\boldsymbol{y}(a)+\epsilon\boldsymbol{h}(a)=\mathrm{A}, \boldsymbol{y}_\epsilon(b)=\boldsymbol{y}(b)+\epsilon\boldsymbol{h}(b)=\mathrm{B}$ が満たされます. つまり $\boldsymbol{y}_\epsilon$ は, **やはり A から B に向かう曲線なのです**. $\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{y}_\epsilon$ のイメージを以下に示します.



すなわち $\boldsymbol{y}_\epsilon$ は, 端点だけを一致させて, 関数 $\boldsymbol{y}$ に何かちがうもの $\epsilon\boldsymbol{h}$ を足して変化させたものと思ってください. ϵ を動かせば, $\boldsymbol{y}_\epsilon$ はうねうねと変化します.

Def : 関数 $\boldsymbol{y}$ の h 方向の変分

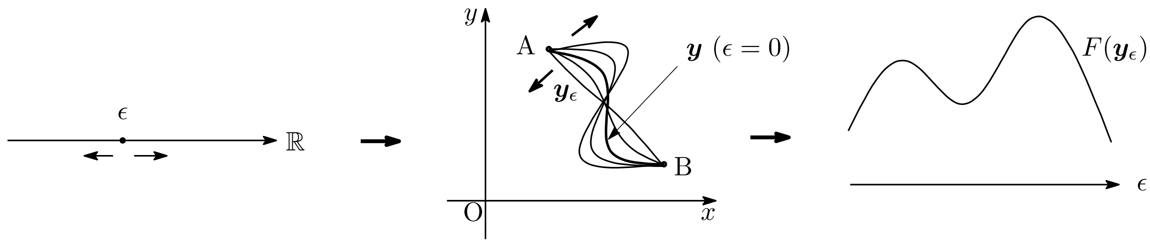
$\boldsymbol{h}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{h}(a)=\boldsymbol{h}(b)=0$ を満たす任意の関数, ϵ を任意の実数としたとき,

$$\boldsymbol{y}_\epsilon=\boldsymbol{y}+\epsilon\boldsymbol{h}.$$

と置き, $\boldsymbol{y}_\epsilon$ を $\boldsymbol{y}$ の $\boldsymbol{h}$ 方向の**変分 (variation)** という. ($\epsilon=0$ のとき, $\boldsymbol{y}_\epsilon=\boldsymbol{y}$ であることを頭に置いて!!)

1.3.2 汎関数の変分

さて, この変分を定義したところで, ϵ を自由に動かすことを考えてみましょう. ϵ を自由にふわふわと動かすと, $\boldsymbol{y}_\epsilon$ もそれに伴ってうねうねと動きます. そして, $\boldsymbol{y}_\epsilon$ **に対する汎関数** F **の値** $F(\boldsymbol{y}_\epsilon)$ **(これは実数です) も変化します**. (ちょっとややこしいことを言っていますが大丈夫ですか? もし抽象的で分かりにくければ, 汎関数 F として曲線の長さをイメージすれば分かりやすいかもしれません.)



このことから分かるように, $F(\boldsymbol{y}_\epsilon)$ は実数 ϵ の関数になっていることが分かります. よって, $F(\boldsymbol{y}_\epsilon)$ は, ϵ で**微分出来ます**. ということは,

1. $F(\boldsymbol{y}_\epsilon)$ を ϵ で微分して 0 と置く.
2. そこから, $F(\boldsymbol{y}_\epsilon)$ が極値を取るときの ϵ が分かる.
3. ϵ から, $\boldsymbol{y}_\epsilon$ が分かる.
4. F はその $\boldsymbol{y}_\epsilon$ に対して極値を取る. すなわち, $\boldsymbol{y}_\epsilon$ は, **解きたかった変分問題の解!**

こういう流れが考えられると思いませんか? よって, $F(\boldsymbol{y}_\epsilon)$ を ϵ で微分するということはすごく大事です. しかも, 上の流れと全く逆の流れとして, 以下のことが言えます.

1. もし, $\boldsymbol{y}$ ($\epsilon = 0$ のときの $\boldsymbol{y}_\epsilon$) が変分問題の解 ($F(\boldsymbol{y})$ が極値) なら $\cdots$
2. $\left.\dfrac{d}{d\epsilon}F(\boldsymbol{y}_\epsilon)\right|_{\epsilon=0} = 0$ が成り立つ.

すなわち, $\epsilon = 0$ のときの $\frac{dF(\boldsymbol{y}_\epsilon)}{d\epsilon}$ を 0 と置けば, この方程式を満たす $\boldsymbol{y}_\epsilon$ というのは, F が極値を取りうる関数になっているはずなのです. 頭がこんがらがっていませんか？ ゆっくりで良いので頑張って付いてきて!

Def : 汎関数 F の第一変分

$$\delta F := \left.\frac{d}{d\epsilon}F(\boldsymbol{y}_\epsilon)\right|_{\epsilon=0}.$$

と置き, 汎関数 F の**第一変分**と呼びます.

$\delta F = 0$ を満たす点 $\boldsymbol{y}$ のことを, F の**臨界点 (critical point)**, または**停留点 (stationary point)** と呼びます. F の臨界点は, F が極値を取りうる点です. ここまでの話は, 微分積分学で $f'(x) = 0$ と置いて, f が極値をとりうる点 x を求めたことの綺麗な拡張になっていることを以下に示しておきましょう.

$$\begin{tikzcd}
\text{関数 } f \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \text{関数 } f \text{ の微分 } f' = 0 \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \text{関数 } f \text{ の極値を取りうる点 } x \arrow[d] \\
\text{汎関数 } F \arrow[r, dotted] & \text{汎関数 } F \text{ の変分 } \delta F = 0 \arrow[r, dotted] & \text{汎関数 } F \text{ の臨界点 } \boldsymbol{y}
\end{tikzcd}$$

1.3.3 臨界点が満たす条件

ここまで, 関数, 汎関数の変分を定義し, 汎関数の変分を 0 と置くことによって汎関数の臨界点を求めることができるという話をしてきました. 今度は, 汎関数の臨界点は一体どのような条件をみたすのか? ということを見て行きましょう. 変分問題を実際に解けるようになるまでもうひと頑張り, 頑張りましょう!

Thm : 第一変分公式

$$\delta F = \frac{d}{d\epsilon}F(\boldsymbol{y}_\epsilon)\Big|_{\epsilon=0} = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) h_i(x)dx.$$

一応断っておきますが, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ です. 証明してみましょう.

Proof. 合成関数の微分法を使います.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\epsilon}F(\boldsymbol{y}_\epsilon)\Big|_{\epsilon=0} &= \frac{d}{d\epsilon}\int_a^b f(x, y_\epsilon(x), y_\epsilon'(x))dx\Big|_{\epsilon=0} \\
&= \int_a^b \frac{df}{d\epsilon}dx\Big|_{\epsilon=0} \\
&= \int_a^b \sum_{i=0}^n \left\{\frac{\partial f}{\partial y_i}h_i(x) + \frac{\partial f}{\partial y_i'}\frac{dh_i}{dx}\right\} dx.
\end{aligned}$$

この積分の第二項を部分積分してみましょう.

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y_i'}\frac{dh_i}{dx}dx = \left[\frac{\partial f}{\partial y_i'}h_i(x)\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'}h_i(x)dx.$$

ここで, $\boldsymbol{h}(a) = \boldsymbol{h}(b) = 0$ より, 第一項は 0 になります. よって,

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y_i'}\frac{dh_i}{dx}dx = -\int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'}h_i(x)dx.$$

これを代入すれば,

$$\delta F = \frac{d}{d\epsilon}F(\boldsymbol{y}_\epsilon)\Big|_{\epsilon=0} = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) h_i(x)dx.$$

を得て証明終了です. □

さて, 今から, 臨界点 $\boldsymbol{y}$ が満たす条件を具体的に求めてみます. そのために, 以下の補題を証明なしで使うことしましょう.

Lem：変分法の基本補題

$\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ が連続で, 任意の連続関数 $\boldsymbol{h}$ が $\boldsymbol{h}(a) = \boldsymbol{h}(b) = 0$ を満たし,

$$\int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) h_i(x) \right) dx = 0.$$

なら, $\boldsymbol{\varphi}(x) \equiv 0$ (i.e. $\boldsymbol{\varphi}$ は零写像) が成り立つ.

この補題と第一変分公式より, 以下の重要な定理を得ます.

Thm：Euler-Lagrange の方程式

$$\boldsymbol{y} \text{ が汎関数 } F \text{ の臨界点} \iff \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \text{ を満たす.}$$

(上に現れた微分方程式を **Euler-Lagrange の方程式**と呼ぶ. E-L 方程式と略したりもする.)

Proof. $\Leftarrow$ は第一変分公式より明らか. $\Rightarrow$ も, 第一変分公式と変分法の基本補題により明らか. □

すなわち, 汎関数 F の臨界点 $\boldsymbol{y}$ を求めたいときは, Euler-Lagrange の方程式を立て, それを解けば良いということが分かったのです. 変分の定義から直接臨界点 $\boldsymbol{y}$ を求めるのは**ほとんどの場合困難**ですが, Euler-Lagrange の方程式という素晴らしいもののお陰で, 変分問題は**微分方程式**の問題に帰着されます. Euler-Lagrange の方程式は, 変分問題を解くのに必須の, とっても強力な武器なのです ☆(ゝω・)v

これで, 変分法についての理論的な解説はオシマイです. みなさん, お疲れさまでした!! 最後に, 変分問題を実際に Euler-Lagrange の方程式を使って **$\mathbb{R}^2$ の 2 点 A,B を結ぶ長さ最小の曲線が線分であること**を示し, この資料を終わりにしたいと思います.

例題 (長さの汎関数の臨界点)

$\boldsymbol{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{c}(t) = {}^t(x(t), y(t))$ の長さ

$$L(\boldsymbol{c}) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

の臨界点を求めよ. (被積分関数 $f(t, \boldsymbol{c}, \dot{\boldsymbol{c}}) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$ の場合です.)

まず, Euler-Lagrange の方程式を立てましょう. $\boldsymbol{c}$ は $\mathbb{R}^2$ の曲線なので, Euler-Lagrange の方程式は 2 次の連立微分方程式になります.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \ , \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

具体的に Euler-Lagrange の方程式を立てるために, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}$ を求めると,

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}, \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}, \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

を得ます．これより, Euler-Lagrange の方程式は,

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}}=0,\ \frac{d}{dt}\frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}}=0.$$

となり, 2 つの式より,

$$\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}}=A,\ \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}}=B\quad (A,B\ \text{は定数})$$

が分かります．ここで, 2 つの式の辺々比を取れば, $\frac{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)}=\frac{A}{B}$ を得るので, $B\dot{x}(t)=A\dot{y}(t)$ です．あとは, 両辺を t で積分すれば $Ay=Bx+C$ $(A,B,C$ は定数$)$ という結果となり, これは**直線の方程式**です．すなわち, $L(\boldsymbol{c})$ の臨界点となる曲線 $\boldsymbol{c}(t)={}^t(x(t),y(t))$ は直線の方程式 $Ay=Bx+c$ を満たすということが無事に示せました．$(A,B,C$ は, $\boldsymbol{c}$ にどのような境界条件を仮定するかにより決まります.)　//

1.4　おわりに

以上で, 変分法に関するお話はオシマイです．なるべく分かりやすく変分法とは何だろうか？ということを理解できるように説明しましたが, もし分かりにくい部分があったらゴメンナサイ．何とか変分法のイメージくらいはつかんでいただけていれば幸いでございます.

変分法は, 実に様々な場面で登場する, 非常に重要なものらしいです．そんな重要な変分法の理解の一助に, この資料が少しでもなれたなら, 著者としてとってもとっても嬉しく思います．それではみなさん, お読みいただいてありがとうございました．お疲れ様でしたー！

参考文献　微分方程式と変分法 (高桑昇一郎)