部分分数分解のやりかた

@minami106

2013 年 1 月 21 日

面倒な分数関数になると, 部分分数分解のやりかたがふと分からなくなってしまうことがありがちです. でも部分分数分解は積分や Laplace 変換等, 様々な面で重要なテクニックなので, その方法をまとめました.

1 部分分数分解の形

今, 部分分数分解をしたい分数関数を $F(x)$ とおきます. $F(x)$ が次のような形に書けているとしましょう.

$$F(x) = \frac{g(x)}{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k}}.$$

(ただし, $g(x)$ の次数は分母の次数より小さいとする). このとき, $F(x)$ は次のような形に部分分数分解されます. これは必ず覚えておいて!!

$$\begin{aligned}F(x) = &\underbrace{\frac{b_{1,n_1}}{(x-a_1)^{n_1}} + \frac{b_{1,n_1-1}}{(x-a_1)^{n_1-1}} + \cdots \frac{b_{1,1}}{(x-a_1)}}_{\text{分母の }a_1\text{に対応する部分}} \\ &+ \underbrace{\frac{b_{2,n_2}}{(x-a_2)^{n_2}} + \frac{b_{2,n_2-1}}{(x-a_2)^{n_2-1}} + \cdots + \frac{b_{2,1}}{(x-a_2)}}_{\text{分母の }a_2\text{に対応する部分}} \\ &+ \cdots + \\ &\underbrace{\frac{b_{k,n_k}}{(x-a_k)^{n_k}} + \frac{b_{k,n_k-1}}{(x-a_k)^{n_k-1}} + \cdots + \frac{b_{k,1}}{(x-a_k)}}_{\text{分母の }a_k\text{に対応する部分}}\end{aligned}$$

要するにこれは, **分母の各因数に対して, その次数の項から, 次数 1 の項までがひとつづつある**ということです. これは例を出したほうがわかりやすいかも.

$$F(x) = \frac{1}{(x-2)^2(x-1)} = \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{B_1}{(x-1)}.$$

$$F(x) = \frac{1}{(x-3)^3(x-2)^2(x-1)} = \frac{A_3}{(x-3)^3} + \frac{A_2}{(x-3)^2} + \frac{A_1}{(x-3)} + \frac{B_2}{(x-2)^2} + \frac{B_1}{(x-2)} + \frac{C_1}{(x-1)}.$$

こんな風に, 各因数の次数を順番に下げながらひとつずつ項を作っていけば良いのです[*1].

[*1] 【複素関数論との関係】 この例のひとつめの $F(x)$ に注目すると, 1 位の極 $x=1$, 2 位の極 $x=2$ を持つことが分かります. いま, $F(x)$ をこの 2 つの極を中心にそれぞれ **Laurent 展開**することを考えると,

- $x=1$ でローラン展開したとき, 特異部は
$$\frac{b_1}{x-1}.$$
- $x=2$ でローラン展開したとき, 特異部は
$$\frac{b_2}{(x-2)^2} + \frac{b_1}{x-2}.$$

となります. 実は $F(x)$ の展開形は, この**ローラン展開の特異部**をそれぞれの極についてすべて加えているという形なのです.

2　Heaviside の展開定理

さて, 具体的な関数の部分分数分解を実際にやってみましょう．高校や高専で, **通分と恒等式による初等的な方法**を学習しますが, 計算の手間がかかってしまうことが多く, 計算ミスをしてしまいがちです．これから, もうちょっと楽な方法で部分分数分解をする方法をご紹介します．例として,

$$F(x) = \frac{1}{(x-2)^2(x-1)}.$$

この関数は, 次のような形に部分分数分解されます.

$$F(x) = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-1)}.$$

さて, この A, B, C を求めることが, 部分分数分解の目標です．そのために, 両辺にまず右辺第一項の分母 $(x-2)^2$ をかけてみましょう.

$$(x-2)^2 F(x) = A + (x-2)B + \frac{C(x-2)^2}{(x-1)}.$$

さて, これよく見るとわかるでしょう．両辺で $x \to 2$ とすれば,

- 左辺 $= \lim_{x \to 2}(x-2)^2 F(x)$.
- 右辺第一項 $= A$
- 右辺第二項と第三項は $x \to 2$ で消える.

となり, 結局のところ,

$$A = \lim_{x \to 2}(x-2)^2 F(x).$$

として A が求められるのです．実際に右辺を計算してみると,

$$\lim_{x \to 2}(x-2)^2 F(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-1)} = 1.$$

さて次は B を求めたいわけですが, さっきと同じように B の項の分母 $(x-2)$ をかけてしまうと,

$$(x-2)F(x) = \frac{A}{x-2} + B + \frac{C(x-2)}{(x-1)}.$$

この式の両辺で $x \to 2$ としても, 右辺第一項が発散してしまって B がうまく求められません．困った!!

そこで工夫をします．$(x-2)$ をかけた式ではなく, $(x-2)^2$ をかけたちょっと前の式に着目するのです.

$$(x-2)^2 F(x) = A + (x-2)B + \frac{C(x-2)^2}{(x-1)}.$$

どうにかして B を取り出したい!! そこで,

- 右辺第一項の**定数が消える**.
- 右辺第二項の一次式が**係数 B だけになってくれる**.

という操作はないかな？ と考えます．思いつきませんか？ これ, **微分なんです**．両辺 x で微分してみると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x-2)^2 F(x) &= \frac{d}{dx}A + \frac{d}{dx}(x-2)B + \frac{d}{dx}\frac{C(x-2)^2}{(x-1)} \\ &= B + \frac{d}{dx}\frac{C(x-2)^2}{(x-1)} \end{aligned}$$

これで両辺 $x \to 2$ の極限をとると，

$$\lim_{x\to 2}\frac{d}{dx}(x-2)^2F(x)=B.$$

こんな風に，B を求めることができました．実際に左辺を計算すると，

$$\frac{d}{dx}(x-2)^2F(x)=\lim_{x\to 2}\frac{d}{dx}\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{(x-1)^2}.=-1.$$

C については，両辺に $(x-1)$ をかけて，$x\to 1$ の極限をとれば簡単に求められます．

$$C=\lim_{x\to 1}(x-1)F(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-2)^2}=1.$$

つまり，求めたかった部分分数分解は，

$$F(x)=\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x-2)}+\frac{1}{(x-1)}.$$

こんな風に，**部分分数分解の各項の分母を両辺にかけてうまく極限をとったり微分をしたりする**ことで，だいぶ楽に部分分数分解を行うことができます．この結果を一般的に述べたものが **Heaviside の展開定理**です．

$F(x)=\dfrac{g(x)}{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k}}$ で，$(g(x)$ の次数$)<($分母の次数$)$ とする．

このとき，$F(x)$ は次のように部分分数分解できる．

$$F(x)=\underbrace{\frac{b_{1,n_1}}{(x-a_1)^{n_1}}+\frac{b_{1,n_1-1}}{(x-a_1)^{n_1-1}}+\cdots\frac{b_{1,1}}{(x-a_1)}}_{\text{分母の }a_1\text{に対応する部分}}$$

$$+\underbrace{\frac{b_{2,n_2}}{(x-a_2)^{n_2}}+\frac{b_{2,n_2-1}}{(x-a_2)^{n_2-1}}+\cdots+\frac{b_{2,1}}{(x-a_2)}}_{\text{分母の }a_2\text{に対応する部分}}$$

$$+\cdots+$$

$$\underbrace{\frac{b_{k,n_k}}{(x-a_k)^{n_k}}+\frac{b_{k,n_k-1}}{(x-a_k)^{n_k-1}}+\cdots+\frac{b_{k,1}}{(x-a_k)}}_{\text{分母の }a_k\text{に対応する部分}}$$

このとき，各係数は次のように求められる．

$$\underbrace{b_{i,n_i-l}}_{a_i\text{に対応する部分の係数}}=\lim_{x\to a_i}\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}F(x)(x-a_i)^{n_i}.$$

この結果は，部分分数分解の各係数の求め方を一般的にまとめたものですが，この結果を完全に理解する必要はなく，**具体的な分数関数が与えられたときに，どんなふうに極限と微分を使えば各係数を取り出せるか？**を，経験的に理解することが大切です[*2]．

---

*2 【複素関数論との関係】ちなみに，$b_{i,1}$ は，$F(x)$ の n_i 位の極 a_i における**留数** $\mathrm{Res}_{x=a_i}F(x)$ に他なりません．($\mathrm{Res}_{x=a_i}F(x)$ は，$F(x)$ を $x=a_i$ を中心に Laurent 展開したときの，$(x-a_i)^{-1}$ の係数) また，Heaviside の展開定理における $b_{i,1}$ の公式

$$b_{i,1}=\lim_{x\to a_i}\frac{1}{(n_i-1)!}\frac{d^{n_i-1}}{dx^{n_i-1}}F(x)(x-a_i)^{n_i}$$

は，複素関数論で登場する **n_i 位の極 $x=a_i$ の留数を求める公式**と一致しています．