# ▹ 発散 in $\mathrm{R}^2$ の導出

**2009 1/4(SUN)　Presented by Minami**

**Quad Erat Demonstrandum? : http://ameblo.jp/dwave/**

**ベクトル場 V の発散 (2 次元)**

ベクトル場 $\mathbf{V} = (u(x,y), v(x,y))$ について, 次のように定義されるスカラー場を, ベクトル場 $\mathbf{V}$ の**発散 (divergence)** という.

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

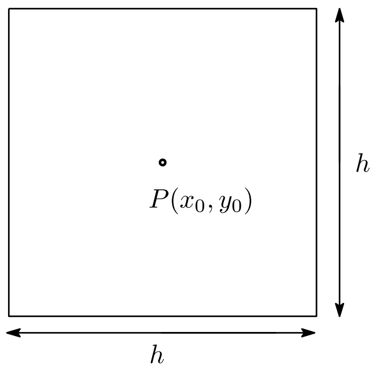
演算子ベクトル $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ を用いると,

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \mathrm{div}\mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

ベクトル場 $\mathbf{V}$ の発散 $\nabla \cdot V$ は, ある点 $(x,y)$ における**湧き出し**を表す. ベクトル場を水流に例えると, ある点 $(x,y)$ に流れ込む水の量と流れ出る水の量の差は, その点 $(x,y)$ から**湧き出している水の量**である. これが点 $(x,y)$ における**発散**である.

これを「こういうモノだと覚えておけ！」という授業や参考書も多いかとは思います. コレを説明するためには**線積分**が必要ですが, それがなかなかややこしくて分かりにくい議論なので, 授業で説明されたは良いけど, 理解がイマイチ $\cdots\cdots$ という方も多いんじゃないでしょうか.
そこで, この資料では,「なぜ $\nabla \cdot \mathbf{V}$ が湧き出しをあらわすのか？」という部分を考えてみたいと思います.

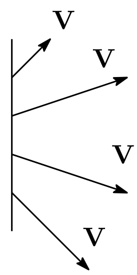
極力, 話がややこしくならないように, この資料では **2 次元の場合**を考えます. が, それでも結構大変なので, 休み休み, ゆっくり理解しながら読んでみて下さい.




１辺の長さが $h$, 中心点が $(x_0, y_0)$ の正方形を考えます. また, この正方形を覆う大きな領域の中には, 水が流れていることとします. (つまり, 水流ベクトル場 $\mathbf{V} = (u(x,y), v(x,y))$ が定義されている)

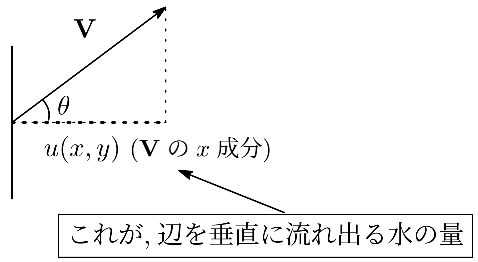
この正方形の中から, 外側に流れ出る水の量 (つまり, 湧き出している量) は, いったいどのように数学的な表現をできるでしょうか？そのことを, これから**線積分**を用いて考えます.

まず, **正方形の右の 1 辺**に着目して考えましょう. 水流ベクトル場 $\mathbf{V} = (u(x,y), v(x,y))$ はいたる所で定義されているので, 当然, **辺の上にも水の流れがある**ことが分かります.

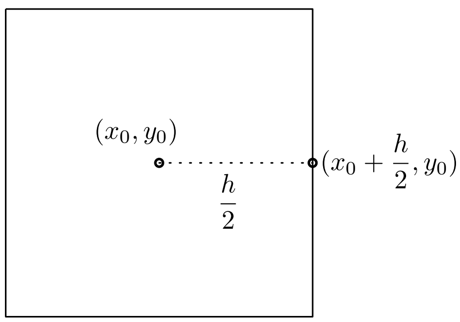



辺上のどこでも, 水の流れを表すベクトル $\mathbf{V}$ が定義されている.

そして, 今知りたいのは**辺の上を通って, 正方形の内から外へ流れ出る水の量**なので, 結局は,$\mathbf{V}$ の, **辺を垂直に横切る成分の大きさ**が分かれば良いことになります.




この $u(x,y)$ の, **辺上の各点での値を, もれなく辺上の全ての点で足し合わせれば**, それは**辺全体から流れ出る水量**を表しますね. この操作は, **辺の上での積分**によって実現できるのです.




では,「辺の上」という積分経路について考えてみましょう. まず, 辺の中心点は, 上図のように表せます. つまり, **中心点から $x$ の正の方向に $h/2$ だけ動かした部分**が, 正方形の右の辺の丁度中心の点となります. そしてこの点を基準として,$y$ 座標を $y_0 - \dfrac{h}{2} \sim y_0 + \dfrac{h}{2}$ まで動かせば, 辺全体を表したことになります.

つまり, 辺全体にわたって $u(x,y)$ を積分するということは, パラメータ $s$ を用いて,

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + s\right) ds$$

と表せます.$s$ が $-\dfrac{h}{2} \sim \dfrac{h}{2}$ まで動くことによって, 辺の上という積分経路を表すのです.

これで, **正方形の右の辺から流れ出る水量**が, 積分を使って表現できました.

**これと全く同様の考え方で, 正方形の上辺, 左辺, 下辺から流れ出る水量が積分で表現できます**.

**正方形の各辺から流れ出る水量**

水流ベクトル場を $\mathbf{V} = (u(x,y), v(x,y))$ とし, 正方形の右辺から流れ出る水量を $W_r$, 左辺から流れ出る水量を $W_l$, 上辺から流れ出る水量を $W_u$, 下辺から流れ出る水量を $W_d$ とすると,

$$W_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + s) ds$$

$$W_l = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u(x_0 - \frac{h}{2}, y_0 + s) ds$$

$$W_u = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v(x_0 + s, y_0 + \frac{h}{2}) ds$$

$$W_d = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v(x_0 + s, y_0 - \frac{h}{2}) ds$$

正方形の内から外へ流れ出る水の総量 $A(x_0, y_0; h)$ は, 各辺から流れ出る水の量の総和なので,

$$A(x_0, y_0; h) = W_r + W_l + W_u + W_d$$

によって求められるということになります.

これは, **直感的な「湧き出し」を数式によって表現した結果**です. これを計算することによって, 任意の正方形の内部から湧き出す水量を計算することができます.
さて, この式は実際に使うのにはやや使いにくいし, 使うのが面倒な式だということは何となく想像していただけるのではないかと思います. 今から, 秘技 **Taylor 展開**を使って, この資料の最初にも示した

$\boxed{(\text{ある点での発散}) = \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}}$ という式を**導出**してみましょう.

まずは,Taylor 展開についての復習です.

**2 変数関数の 2 次までの Taylor 展開**

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\Delta y^2 + O(|\Delta x|^3 + |\Delta y|^3)$$

これを使って, $\boxed{W_r, W_l, W_u, W_d \text{ の被積分関数を展開}}$ してみましょう.

$$u(x_0 \pm \frac{h}{2}, y_0 + s) = u(x_0, y_0) \pm \frac{h}{2}\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} s$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} \pm \frac{h}{2} s \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2} s^2 + O(h^3)$$
$$\left( u(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + s) \text{ と } u(x_0 - \frac{h}{2}, y_0 + s) \text{ をまとめて展開しました} \right)$$

ちなみに,$O(h^3)$ の中になぜ $s$ が無いのか !? というと, パラメータ $s$ の絶対値 $|s|$ は $h$ よりも絶対に小さいので, 結局, 誤差項は $h^3$ に比例する, というのが理由です. 分からなかったら気にしなくても良いですよ.

同じように $v$ も 2 つまとめて展開すると,

$$v(x_0+s, y_0 \pm \frac{h}{2}) = v(x_0, y_0) + \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}s \pm \frac{h}{2}\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}$$

$$+ \frac{1}{2}s^2\frac{\partial^2 v(x_0,y_0)}{\partial x^2} \pm \frac{h}{2}s\frac{\partial^2 v(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 v(x_0,y_0)}{\partial y^2} + O(h^3)$$

これで,$W_r, W_l, W_u, W_d$ の被積分関数を Taylor 展開した形が求められました.
さて, 次に正方形の内部から外部に流れ出る水の総量 $A(x_0, y_0; h) = W_r + W_l + W_u + W_d$ を, これらの **Taylor 展開形を使って**書き換えてみましょう.

$$A(x_0,y_0;h) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( u(x_0+\frac{h}{2}.y_0+s) + u(x_0-\frac{h}{2}, y_0+s) + v(x_0+s, y_0+\frac{h}{2}) + v(x_0+s, y_0-\frac{h}{2}) \right) ds$$

この積分の被積分関数の Taylor 展開形は先程求めたので, それを使って**被積分関数を書き換え, さらに定積分を行う**と, 以下のように変形することができます.

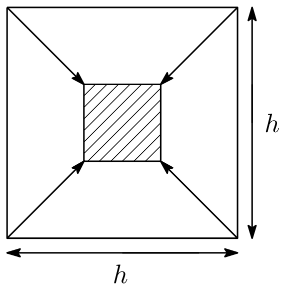
$$A(x_0,y_0;h) = h^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + O(h^4)$$

1 辺の長さが $h$ の正方形の内部から外部へ流れ出る水の総量 $A(x_0, y_0; h)$ をここまで書き換えることができました. さて, ここで, **正方形の単位面積あたりの流出量** $\tilde{A}$ を求めるために, 正方形の面積 $h^2$ で $A(x_0, y_0; h)$ を割ってみます.

$$\tilde{A} = \frac{A(x_0,y_0;h)}{h^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{O(h^4)}{h^2}$$

さて, **正方形の一辺だった $h$ を, 限りなく 0 に近づけてみます**.
こうすることにより, **正方形が無限に小さくなり, 一つの点となります**.
つまり,$\tilde{A}$ の $h \to 0$ への極限は, **正方形の中心点** $(x_0, y_0)$ **における発散**を意味するのです.

限りなく $h$ を 0 に近づける




限りなく $h$ を 0 に近づけた結果,$\tilde{A}$ は次のような形になりました.

$$\lim_{h \to 0} \tilde{A} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

これは, ある点における**湧き出し量**を表すので, これを $\mathrm{div}\mathbf{V}$ と定義すると,

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

以上で,**2 次元の発散**の導出が完了しました！

**ベクトル場 V の発散 (2 次元)**

ベクトル場 $\mathbf{V} = (u(x,y), v(x,y))$ について, 次のように定義されるスカラー場を, ベクトル場 $\mathbf{V}$ の **発散 (divergence)** という.

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

演算子ベクトル $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ を用いると,

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \mathrm{div}\mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

ベクトル場 $\mathbf{V}$ の発散 $\nabla \cdot V$ は, ある点 $(x,y)$ における**湧き出し**を表す. ベクトル場を水流に例えると, ある点 $(x,y)$ に流れ込む水の量と流れ出る水の量の差は, その点 $(x,y)$ から**湧き出している水の量**である. これが点 $(x,y)$ における**発散**である.

導出を終えたあとに見るこの発散の式, 何だか導出をやる前と違って見える気がしません？
大変な道のりでしたが, これで,「モヤッとした気持ち」を払拭していただけたとしたらとても嬉しいです.
ちなみに,**3 次元の発散の導出も, 発想はこれと全く一緒です. 次元が上がっただけです.**

というわけで, この資料はこれにて終了です. お読みいただき, どうもありがとうございました.

**参考文献**


- 『ベクトル解析入門』 / 小林亮, 高橋大輔 著 （東京大学出版会）
- 『基礎解析学 改訂版』 / 矢野健太郎, 石原繁 著 (裳華房)