

微分方程式 基本事項, 解法のまとめ

2011年7月12日

目次

1	解曲線	2
2	全微分方程式	3
3	1 階微分方程式	3
4	変数分離形	3
5	1 階線形微分方程式	3
6	Bernoulli の微分方程式	4
7	完全微分方程式	5
8	定数係数 2 階線形微分方程式	6

1 解曲線

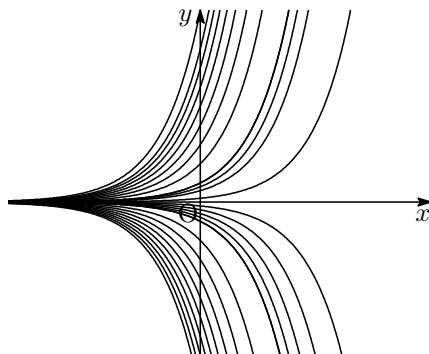
次の微分方程式を考える.

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x).$$

この微分方程式を満たすような関数 y を, この微分方程式の解という.

例 微分方程式 $y' = y$ の解は $y = Ce^x$ である.

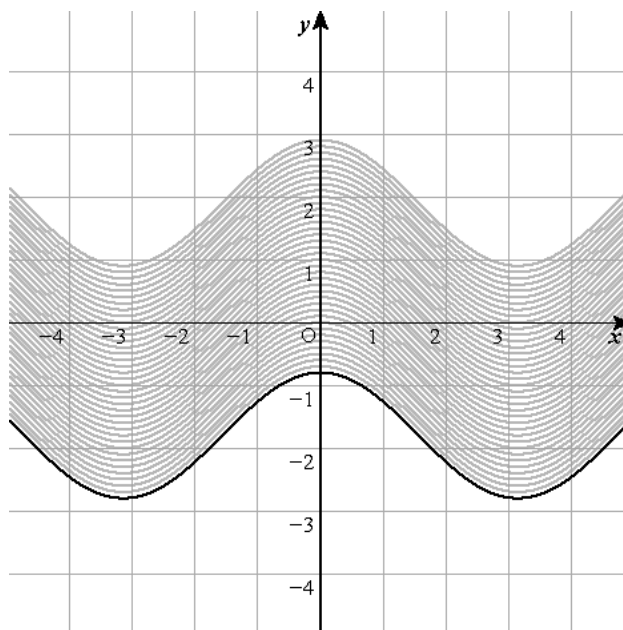
なぜなら, $y = Ce^x$ のとき $y' = Ce^x$. よって, $y' = y$ を満たすからである.



C を動かすと, y は上のような曲線群を表す. このような曲線を解曲線という.

例 微分方程式 $y' = -\sin x$ の解は $y = \cos x + C$ (C 任意定数) である.

なぜなら, $y = -\int \sin x dx = \cos x + C$ だからである.



2 全微分方程式

二変数関数 $P(x, y), Q(x, y)$ によって,

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

と表される微分方程式を全微分方程式という。この微分方程式は、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} Q(x, y)dy &= -P(x, y)dx \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \end{aligned}$$

3 1階微分方程式

y についての1階導関数のみしか現れないような微分方程式を1階微分方程式という。特に、以下のような形をした微分方程式 ($\frac{dy}{dx}, y$ について一次式になっている) を、1階線形微分方程式という。

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

1階線形微分方程式については、簡単に解くことができる。また、線形でない1階微分方程式も、解き方が知られている場合がある。

4 変数分離形

$$\frac{dy}{dx} = P(x)Q(y).$$

と1階導関数 = (x の関数) \times (y の関数) の形で書ける微分方程式を、変数分離形の微分方程式という。変数分離形は最も基本的な微分方程式であり、様々な微分方程式が、工夫により変数分離形に帰着して解ける。変数分離形の微分方程式は以下のように解くことができる。

1. $Q(y)$ (y の関数) で両辺を割る。 ($Q(y) \neq 0$ という条件を付ける.)

$$\frac{1}{Q(y)} dy = P(x)dx.$$

2. 両辺を積分する。 (左辺は y の積分, 右辺は x の積分になる)

$$\int \frac{1}{Q(y)} dy = \int P(x)dx.$$

あとは実際に積分を計算して行けば良い。

3. 残してあった $Q(y) = 0$ の場合も考える。 $P(c) = 0$ (c は定数) ならば, $y = c$ も微分方程式の解である。

5 1階線形微分方程式

1階線形微分方程式,

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

を解こう。この微分方程式は定数変化法という強力な方法で解くことができる。定数変化法を以下に示す。

1. $Q(x) = 0$ と置いた微分方程式 (斉次方程式という) を解く. これは必ず変数分離形となるので, 解くことができる. この解は $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ となる (C は任意定数).

2. 斉次方程式の解 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ の任意定数 C を, x の関数 $u(x)$ に置き換える (変化させる.)

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \rightarrow y = u(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

積の微分公式により,

$$y' = u'(x)e^{-\int P(x)dx} - u(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

3. y, y' をもとの微分方程式代入する.

$$u'(x)e^{-\int P(x)dx} - u(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

左辺の項が綺麗に打ち消しあうので, 残りの部分は,

$$u'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \quad \therefore u'(x) = e^{\int P(x)dx} Q(x).$$

両辺を x で積分すると,

$$u(x) = \int e^{\int P(x)dx} Q(x) dx + C.$$

あとはこれを $y = u(x)e^{-\int P(x)dx}$ に代入すれば, 求めたかった一般解

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int e^{\int P(x)dx} Q(x) dx + C \right) \quad (C \text{ は任意定数})$$

を得る. この一連の手順を定数変化法という. 1 階線形微分方程式は定数変化法を素直に適用して解いても勿論構わないし, 導いた解の公式を覚えて, それに代入して解を求めるのでも良い (こちらのほうが答えが早く分かることが多い).

6 Bernoulli の微分方程式

定数係数でも線形でもない微分方程式は一般に解くことはできない. が, 以下のような特殊な形をしている微分方程式は解くことができる.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1).$$

この形の微分方程式を Bernoulli の微分方程式という. (ちなみに, $n = 0$ なら上式は線形微分方程式, $n = 1$ なら変数分離形なので, 簡単に解ける.) Bernoulli の微分方程式の解き方を以下に示す.

1. $z = y^{1-n}$ と置く. これを微分すると,

$$z' = (1-n)y^{-n}y'.$$

を得る. さらに, 両辺に y^n をかけて, $y^n z' = (1-n)y'$ を得る. これより,

$$y' = \frac{1}{1-n} y^n z'.$$

2. これを微分方程式に代入する.

$$\frac{1}{1-n}y^n z' + P(x)y = Q(x)y^n.$$

両辺を y^n で割って,

$$\frac{1}{1-n}z' + P(x)y^{1-n} = Q(x).$$

$z = y^{1-n}$ だったので,

$$\frac{1}{1-n}z' + P(x)z = Q(x).$$

両辺に $1-n$ をかけて,

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

これは定数係数 1 階線形微分方程式なので、あとは普通に解けば良い。

7 完全微分方程式

全微分方程式

$$P(x, y)dy + Q(x, y)dx = 0.$$

のうち、特に、ある二変数関数 $F(x, y)$ に対して $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$ であるなら、上の微分方程式は、関数 F の全微分

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0.$$

と書ける。このような関数 F が存在するような全微分方程式を、完全微分方程式、または、完全形的全微分方程式と呼ぶ。この微分方程式の解は、

$$F(x, y) = C \quad (C \text{ は任意定数}).$$

である。実際に両辺を x, y で偏微分すれば、完全微分方程式を満たすことが分かる。

全微分方程式 $P(x, y)dy + Q(x, y)dx = 0$ が与えられたとき、これが完全微分方程式かどうかは次のように簡単にテストできる。

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \iff P(x, y)dy + Q(x, y)dx = 0 \text{ が完全微分方程式.}$$

上の条件^{*1}を用いて完全微分方程式かどうかを調べ、もし完全微分形なら、

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0.$$

を満たすような関数 F があるので、それを求めれば良い。 F は次の積分により求めることが出来る。

^{*1} ベクトル解析の言葉を使うと、上の条件は \mathbb{R}^2 のベクトル場 $\mathbf{V} = (P(x, y), Q(x, y))$ に対して、

渦度 $[\nabla \cdot \mathbf{V}] = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P(x, y) & Q(x, y) \end{vmatrix} = 0 \iff P(x, y)dy + Q(x, y)dx = 0$ が完全微分方程式 と書き換えられる。これはすなわち、 \mathbb{R}^2 上でベクトル場 $\mathbf{V} = (P(x, y), Q(x, y))$ が渦を巻いていないことに相当する。

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(\xi, y) d\xi + \int_{y_0}^y Q(x_0, \eta) d\eta.$$

ここで、 (x_0, y_0) を基点といい、積分が計算しやすいように取る。 $(x_0 = y_0 = 0)$ と取るのが多い

が、この積分の計算は大変なので、次のくくり直し法を用いて解くことが多い(大抵の問題は、こちらを使って解いたほうが圧倒的に計算量が削減できる)。例を通して説明する。

例 $(2x + 3y)dx + (3x + y^2 + 3)dy = 0$ を解きたい。

$M_y = 3, N_x = 3$ なので、これは完全微分方程式である。この時、以下のようにくくり直しを行う。

$$\underbrace{2x dx}_{x \text{ だけ}} + \underbrace{(3y dx + 3x dy)}_{x, y \text{ が混じっている}} + \underbrace{(y^2 + 3) dy}_{y \text{ だけ}} = 0$$

これを全微分を使って書きなおしたい。全微分の定義より、 dx の係数は x で微分したあとのもの、 dy の係数は y で微分したあとのものである。これらの係数をそれぞれ x, y で微分する前の関数に戻す。全微分 d を用いて上の微分方程式を書き直すと、

$$d(x^2) + d(3xy) + d\left(\frac{1}{3}y^3 + 3y\right) = 0.$$

さらに左辺は $d(x^2 + 3xy + \frac{1}{3}y^3 + 3y)$ と等しい。よって、解は $x^2 + 3xy + \frac{1}{3}y^3 + 3y = C$ (C は定数) と書ける。このように解を求める方法をくくり直し法という。

8 定数係数 2 階線形微分方程式

定数係数の 2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = P(x).$$

は解くことができる。解き方を以下に示す。

- まず、右辺=0 と置く(斉次方程式)。そのとき、特性方程式 $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ を解き、 λ の値を求める。あとはその値により、斉次方程式の一般解を求める。 (C_1, C_2) の係数を斉次方程式の基本解という。

(a) λ が異なる実数解 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$.

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

(b) λ が 1 つの重解 $\lambda = \lambda_0$.

$$y = e^{\lambda_0 x} (C_1 + x C_2).$$

(c) λ が異なる複素数解 $\lambda = p \pm qi$

$$y = e^{px} (C_1 \cos qx + C_2 \sin qx).$$

- 右辺 = $P(x)$ の方程式(非斉次方程式)の 1 つの特解を求めれば、非斉次方程式の一般解 y は、

$$y = (\text{斉次方程式の一般解}) + (\text{非斉次方程式の特解}).$$

で求めることができる。よって、あとは非斉次方程式の 1 つの特解を求めれば良いが、これを求めるには様々な方法があるが、最も原始的で強力なのは定数変化法であり、これを使えば機械的に解を求めることができる。が、この方法を原始的に適用すると計算に大変な手間を要するので、あまり現実的では

ない.

そこで, 定数変化法の結果導かれる以下の公式を用いることにより, 非斉次方程式の 1 つの特解 y_0 を求める方法がある.

$$y_0 = F(x) \int \frac{-P(x)G(x)}{W(x)} dx + G(x) \int \frac{P(x)F(x)}{W(x)} dx.$$

ただし, $F(x), G(x)$ は斉次方程式の基本解. $W(x)$ は Wronski 行列式で, $W = \begin{vmatrix} F(x) & G(x) \\ F'(x) & G'(x) \end{vmatrix}$.