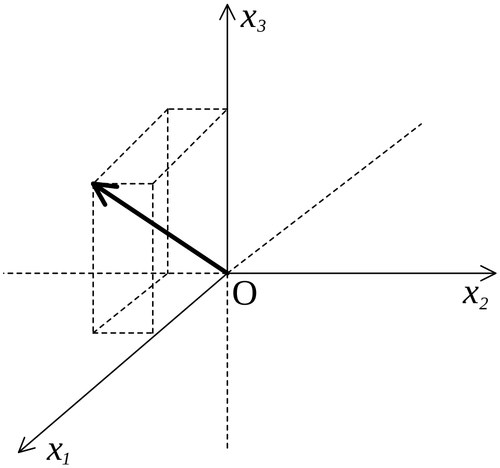
線形空間の入門編 Part2

あけまつしんじ

j1701

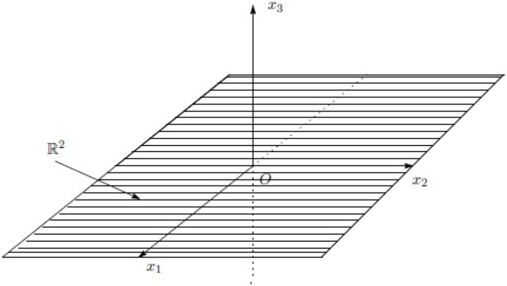
March 11, 2013

大きい線形空間, 小さい線形空間



大きい線形空間, 小さい線形空間

よーくみてみると, $\mathbb{R}^3$ には $\mathbb{R}^2$ が埋め込まれている!!

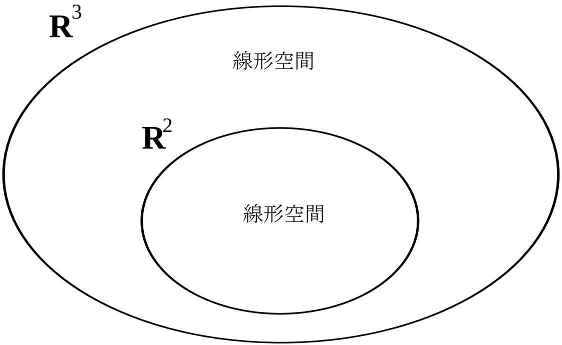


大事なポイント 1

$$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3.$$

大きい線形空間, 小さい線形空間

さらに, $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}$-**線形空間**だった.



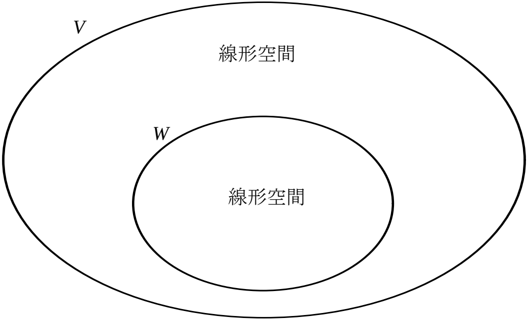
大事なポイント 2

- $\mathbb{R}^3$: 大きい**線形空間**
- $\mathbb{R}^2$: 小さい**線形空間**

大きい線形空間, 小さい線形空間

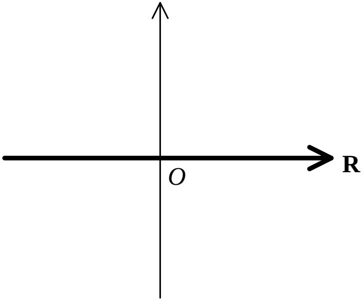
定義

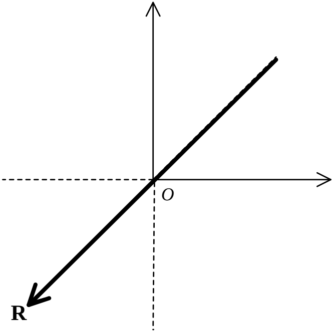
V は $\mathbb{R}$-線形空間とし, $W \subset V$ とする.
W も $\mathbb{R}$-線形空間のとき, W は V の**部分空間 (subspace)** であるという.



部分空間の例

$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ も,
それぞれ部分空間になっている.





実際証明するのは大変!!

$W \subset V$ が部分空間になっていることを示すためには $\cdots$

和, スカラー倍について閉じている

- $\forall a, b \in W \Rightarrow a + b \in W.$
- $\forall a \in W, \forall c \in \mathbb{R} \Rightarrow ca \in W.$

8 つの代数的性質

- 和について $\cdots$
  - $\exists 0 \in W \quad s.t. \quad \forall a \in W \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a.$ (ゼロベクトル)
  - $\forall a \in W, \exists(-a) \in W \;\; s.t. \; a + (-a) = (-a) + a = 0.$ (和の逆元)
  - $\forall a, b \in W \Rightarrow a + b = b + a.$ (可換)
  - $\forall a, b, c \in W \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c).$ (結合法則)
- スカラー倍について $\cdots$
  - $\forall a \in W \Rightarrow 1a = a.$ (1 倍しても変わらない)
  - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in W \Rightarrow (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ (分配法則)
  - $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a, b \in W \Rightarrow \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ (分配法則)
  - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in W \Rightarrow (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a).$

実際証明するのは大変!!

これだけのことを全部示すのはしんどい(´・ ω ・`)

実はこれでOK!!

定理

V : $\mathbb{R}$-線形空間.
$W \subset V$ が V の部分空間であることと, 以下が満たされることは同値.

1. $W \neq \varnothing$.
2. $\forall a, b \in W \Rightarrow a + b \in W$.
3. $\forall a \in W, \forall c \in \mathbb{R} \Rightarrow ca \in W$.

Proof.

今日の最後の演習問題!! □

大事な補足

Important!!

部分空間も $\mathbb{R}$-線形空間なので, **ゼロベクトルが存在!!**

$$\exists 0 \in W.$$

大事な補足

例題：次の W が $\mathbb{R}^3$ の部分空間かどうかを判定せよ

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \right\}$$

部分空間ではないとすぐわかる!!

Proof.

$0 - 2 \times 0 - 0 \neq 3$ より, $0 \notin W$ だから. □

張る空間

V は $\mathbb{R}$-線形空間とする.

定義

$v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ とする.

$$< v_1, v_2, \cdots, v_n > \stackrel{\text{def}}{=} \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \mid a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

と定義し, $< v_1, v_2, \cdots, v_n >$ を,
$v_1, v_2, \cdots, v_n$ が**張る空間 (spanning space)** と呼ぶ.

張る空間

定理

$< v_1, v_2, \cdots, v_n >$ は V の部分空間.

示すべきことは 3 つ!!

1. $< v_1, v_2, \cdots, v_n > \neq \varnothing$.
2. $\forall a, b \in < v_1, v_2, \cdots, v_n > \Rightarrow a + b \in < v_1, v_2, \cdots, v_n >$.
3. $\forall c \in \mathbb{R}, \forall a \in < v_1, v_2, \cdots, v_n > \Rightarrow ca \in < v_1, v_2, \cdots, v_n >$.

張る空間

証明

- $< v_1, v_2, \cdots, v_n > \neq \varnothing$.
  $0 \in < v_1, v_2, \cdots, v_n >$ より, $< v_1, v_2, \cdots, v_n > \neq \varnothing$.
- $\forall a, b \in < v_1, v_2, \cdots, v_n > \Rightarrow a + b \in < v_1, v_2, \cdots, v_n >$.

$$\begin{aligned} a &= a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \\ b &= b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n \end{aligned}$$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} a + b &= (a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n) + (b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n) \\ &= (a_1 + b_1) v_1 + (a_2 + b_2) v_2 + \cdots + (a_n + b_n) v_n \\ &\in < v_1, v_2, \cdots, v_n > \end{aligned}$$

張る空間

証明

- $\forall c \in \mathbb{R}, \forall a \in < v_1, v_2, \cdots, v_n > \Rightarrow ca \in < v_1, v_2, \cdots, v_n >$.

$$\begin{aligned} a &= a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \\ & (a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ca &= c(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n) \\ &= (ca_1)v_1 + (ca_2)v_2 + \cdots + (ca_n)v_n \in < v_1, v_2, \cdots, v_n > \square \end{aligned}$$

和空間と共通部分

定義

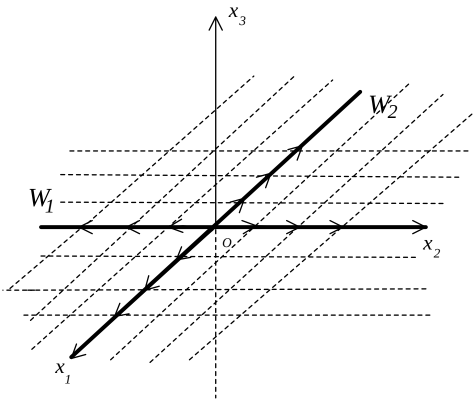
V を $\mathbb{R}$-線形空間, W_1, W_2 を V の部分空間とする.

$$W_1 + W_2 \overset{\text{def}}{=} \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}.$$

で定義される $W_1 + W_2$ を, W_1, W_2 の**和空間 (sum space)** という.

和空間と共通部分

$$W_1 =< e_1 >, W_2 =< e_2 > .$$



$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in< e_1 >, w_2 \in< e_2 >\}.$$
$$= \{c_1e_1 + c_2e_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

和空間と共通部分

$M_2(\mathbb{R})$ も $\mathbb{R}$-線形空間だった!!

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}. \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \right\} = M_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

和空間と共通部分

命題

$W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$ は V の部分空間である.

Proof.

今日の最後の演習問題!! $\square$

和空間と共通部分

定義

$V = W_1 + W_2, W_1 \cap W_2 = \{0\}$ のとき,

$$V = W_1 \oplus W_2$$

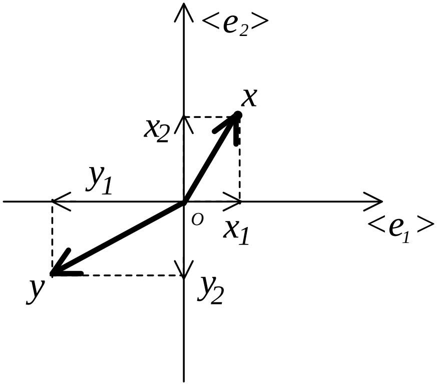
と書き, V は W_1, W_2 の**直和空間 (direct sum space)** という.

定理

$V = W_1 \oplus W_2$
$\iff \forall v \in V$ が $v = w_1 + w_2 \ (w_1 \in W_1, w_2 \in W_2)$ と**一意的に**表せる.

和空間と共通部分

$$\mathbb{R}^2 = < e_1 > \oplus < e_2 >, \forall x, y \in \mathbb{R}^2.$$



$$x = x_1 + x_2 \quad (x_1 \in < e_1 >, x_2 \in < e_2 >)$$

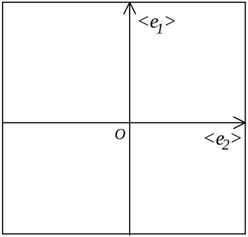
線形空間をつなぐもの

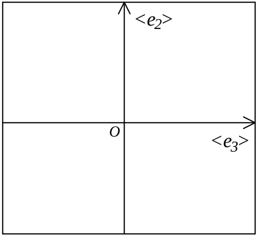
線形空間と線型空間の関係を調べたい!!

例

$\mathbb{R}^3$ の部分空間,

$$V = < e_1, e_2 >, W = < e_2, e_3 >$$





軸の名前が違うだけで, **全く同じ $\mathbb{R}$-線形空間!!**

線形空間をつなぐもの

この事実の鍵をにぎるのが, **線形写像 (linear mapping)**!!

$$\exists f : V \xrightarrow{\sim} W \quad \text{(linear isomorphism.)}$$

important!!

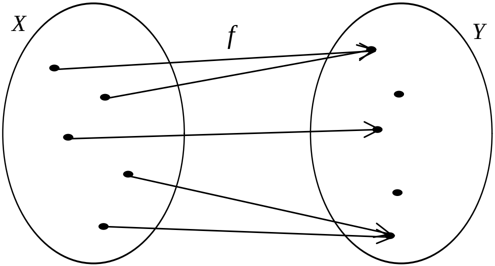
「線形写像」は「線形空間同士の関係」を明らかにする!!

"写像" とは何だ??

数学と切っても切り離せない, 最重要パーソン **「写像 (mapping)」**.

定義

集合 X から集合 Y への**写像 (mapping)** f とは, **集合 X の元に集合 Y の元を対応させるルール**のことである.



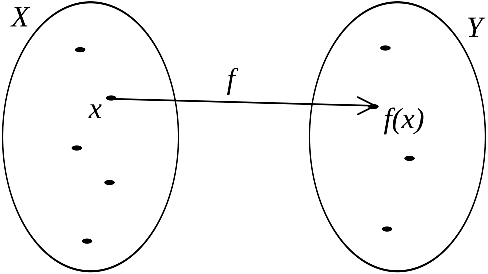
"写像" とは何だ??

定義

「X から Y への写像 f」というのを, 省略して

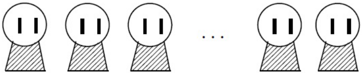
$$f : X \to Y.$$

と書く. また, $x \in X$ を f で飛ばした先の元を $f(x)$ と書く.

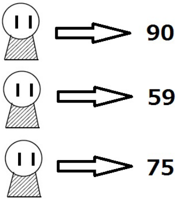


例：身近なことが写像に見える

釧路高専 3D の学生全体の集合を $3D$ と置く.



3D の学生が, 100 点満点の数学のテストを受けた.
このとき, 各学生には $0 \sim 100$ 点の点数が対応する.



例：身近なことが写像に見える

学生に点数を対応させる規則 t

$3D$ の元 (学生) に, テストの点数を対応させるルールを t と書く.

$$t : 3D \to \{0, 1, \cdots, 100\}$$

は, $3D$ から $\{0, 1, \cdots, 100\}$ への**写像**といえる!!

例

$$t(\mathrm{Okahisa}) = 95, t(\mathrm{Nagamachi}) = 60.$$

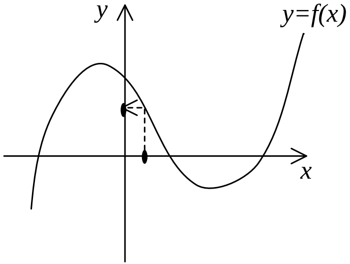
例：関数 is 写像

関数は写像

実関数 $f(x)$ というのは,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

とみなすことができる.



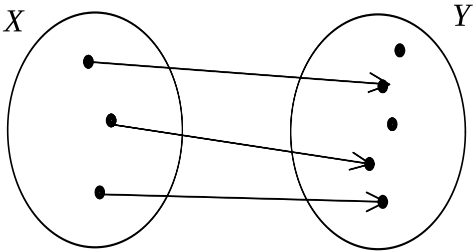
Let's try

思いつく面白そうな写像を 3 つくらい挙げてみよう!!

定義

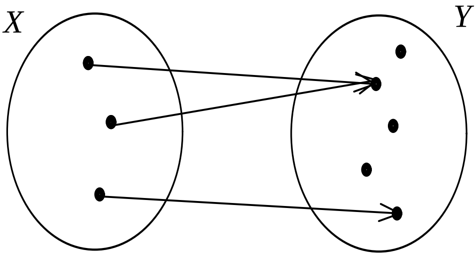
$f : X \to Y$ が次を満たすとき, f は**単射 (injection)** であるという.

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$



違うものは, 違うところへ!!

単射



単射でない写像

単射

単射の定義

写像が単射だということを証明するときは, さっきの定義の**対偶**

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

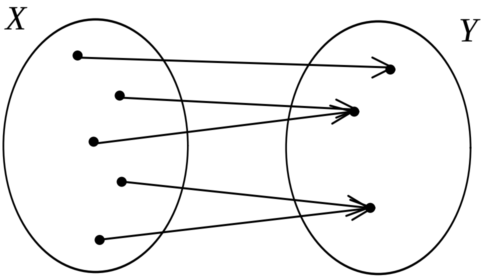
を単射の定義とするほうが良い!! **(対偶は真偽が一致)**

全射

定義

$f : X \to Y$ が**全射 (surjection)** とは, 次が満たされることである.

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \ s.t. \ y = f(x)$$

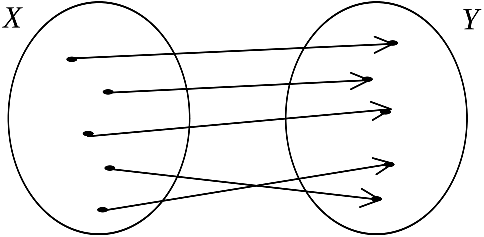


全部, どっかから来ている!!

全単射

定義

$f : X \to Y$ が**全単射 (bijection)** とは,
f が**全射かつ単射**であることをいう.



一対一対応!!

全単射

$f: X \to Y$ が**全単射 (bijection)** のとき,

1. $\forall y \in Y$ に対して $\exists x \in X$ $s.t.$ $y = f(x)$ (f は全射だから)
2. それはただひとつに定まる (f は単射だから)

定義

$f^{-1}: Y \to X$ を, $y \in Y$ に対して, 上のように定まる x を対応させる写像とする. この f^{-1} を, f の**逆写像 (inverse mapping)** と呼ぶ.

定義

$\mathrm{id}_X : X \to X$ を,

$$\forall x \in X, \mathrm{id}_X(x) = x.$$

を満たす写像とする (つまり, **何もかえない**写像).
id_X を, X の**恒等写像 (identity map)** という.

全単射

定義

$f : X \to Y, g : Y \to Z$ により, $g \circ f : X \to Z$ を次のように定める.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (\forall x \in X)$$

$g \circ f$ を f, g の**合成写像 (composition map)** という.

※合成写像は順番に注意!!

定理

$f : X \to Y$ が全単射 $\iff$

$$\exists g : Y \to X \ s.t. \ g \circ f = \mathrm{id}_X, f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

写像の用語

$f : X \to Y$ に対して $\cdots$

定義

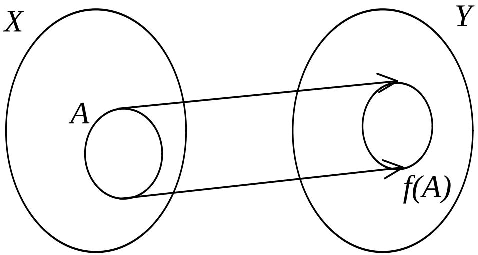
X を, f の**定義域 (domain)** と呼ぶ.

$A \subset X$ に対して $\cdots$

定義

$$f(A) \overset{\text{def}}{=} \{f(a) \mid a \in A\}.$$

を A の f による**像 (image)** と呼ぶ.



線形写像

いよいよ, 線形代数の**最も重要な鍵**をにぎる**「線形写像」**を定義しよう.

定義

V, W を $\mathbb{R}$-線形空間とする. $f : V \to W$ が次を満たすとき,
f を V から W への**線形写像 (linear mapping)** という.

- $f(x+y) = f(x) + f(y). \quad (\forall x, y \in V)$
- $f(cx) = cf(x). \quad (\forall x \in V, \forall c \in \mathbb{R})$

とりあえず, いろんな線形写像を見てみよう.

行列による線形写像

$A \in M_n(\mathbb{R})$ とする. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を

$$f(v) = Av \quad (v \in \mathbb{R}^n).$$

と定義すると, f は**線形写像!!**

これは, 行列のベクトルへの掛け算の性質

- $A(v + w) = Av + Aw \quad (v, w \in \mathbb{R}^n)$
- $A(cv) = cAv \quad (v \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}).$

からすぐに証明できる.

このように, **最も基本的な「行列によるベクトルの変換」は, 線形写像**!!

例：多項式の微分

多項式の微分

$$V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

とおくと, V は $\mathbb{R}$-線形空間である.
$D : V \to V$ を次のように定義.

$$D(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 + 2a_2 x.$$

この D は**線形写像**である.
(*D* は, **2 次の多項式の微分**にほかならない!!)

$\forall f, g \in V$ とする.

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ g(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \end{aligned}$$

例：多項式の微分

1. $D(f+g) = D(f) + D(g)$

$$\begin{aligned} D(f+g) &= D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + b_0 + b_1x + b_2x^2) \\ &= D\left[(a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2\right] \\ &= (a_1+b_1) + 2(a_2+b_2)x \\ &= (a_1 + 2a_2x) + (b_1 + 2b_2x) \\ &= D(f) + D(g). \end{aligned}$$

2. $D(cf) = cD(f) \quad (\forall c \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} D(cf) &= D(ca_0 + ca_1x + ca_2x^2) \\ &= ca_1 + 2ca_2x \\ &= c(a_1 + 2a_2x) \\ &= cD(f). \end{aligned}$$

よって, $D : V \to V$ は線形写像!!

例：定数係数線形 2 階 ODE の解空間の線形写像

定数係数線形 2 階 ODE の解空間の線形写像

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_2y = 0.$$

の解空間を S とする．$T : S \to S$ を次のように定める．

$$T(y) = \frac{dy}{dx}.$$

この T は線形写像である．

point!!

まず，「$T : S \to S$ が線形写像」だと示さなきゃいけないので，

S の元を T で写したらちゃんと S の元になるか??

を調べなきゃいけない．

例：定数係数線形2階ODEの解空間の線形写像

よって, 示すべきことは3つ.

1. $\forall y \in S, T(y) \in S.$
2. $\forall y_1, y_2 \in S, T(y_1 + y_2) = T(y_1) + T(y_2).$
3. $\forall y \in S, \forall c \in \mathbb{R}, T(cy) = cT(y).$

例：定数係数線形 2 階 ODE の解空間の線形写像

- $\forall y \in S, T(y) \in S.$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2T(y)}{dx^2} + a_1\frac{dT(y)}{dx} + a_2T(y) &= \frac{d^3y}{dx^3} + a_1\frac{d^2y}{dx^2} + a_2\frac{dy}{dx} \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_2y\right) = 0.
\end{aligned}$$

よって, $T(y) \in S$ である.

- $T(y_1 + y_2) = T(y_1) + T(y_2)$

$$\begin{aligned}
T(y_1 + y_2) &= \frac{d}{dx}(y_1 + y_2) \\
&= \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \\
&= T(y_1) + T(y_2).
\end{aligned}$$

例：定数係数線形 2 階 ODE の解空間の線形写像

- $T(cy) = cT(y)$

$$\begin{aligned} T(cy) &= \frac{d(cy)}{dx} \\ &= c\frac{dy}{dx} \\ &= cT(y). \end{aligned}$$

よって, $T : S \to S$ は線形写像!!