

線形空間の入門編 Part1

あけまつしんじ

j1701

March 15, 2013

- 行列とベクトルの**計算**がメイン.
- 固有値を**計算**, 対角化を**計算**
- 階数を**計算**, 行列式を**計算**...
- **計算**, **計算**, **計算**, **計算**, ...

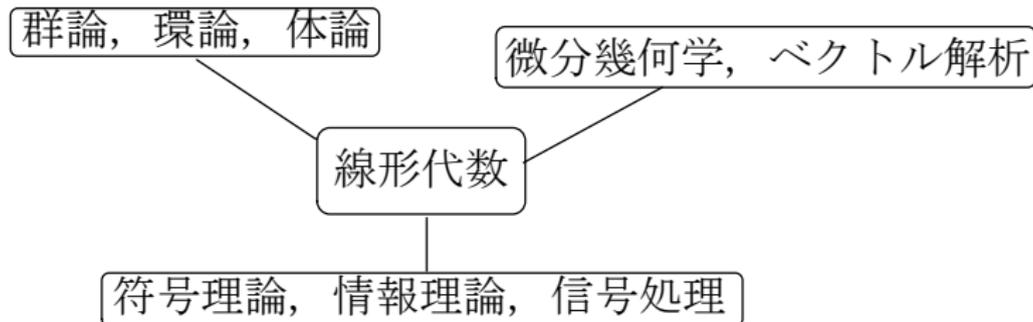
$$(\hat{\cdot} \cdot \omega \cdot \hat{\cdot})$$

一方, 線形空間の話はというと

もっともっと数学的な考え方が中核に!!

- 線形写像 $f : V \rightarrow W$ が
 - 全射 (surjection) とは?
 - 単射 (injection) とは?
 - 全単射 (bijection) とは?
- $\text{Im } f, \text{Ker } f$ が部分空間であることを示せ.
- $V/\text{Ker } f \simeq \text{Im } f, \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \dim V$ はなぜ言える??

- 線形代数は**使える数学!!**



このレクチャーの目標

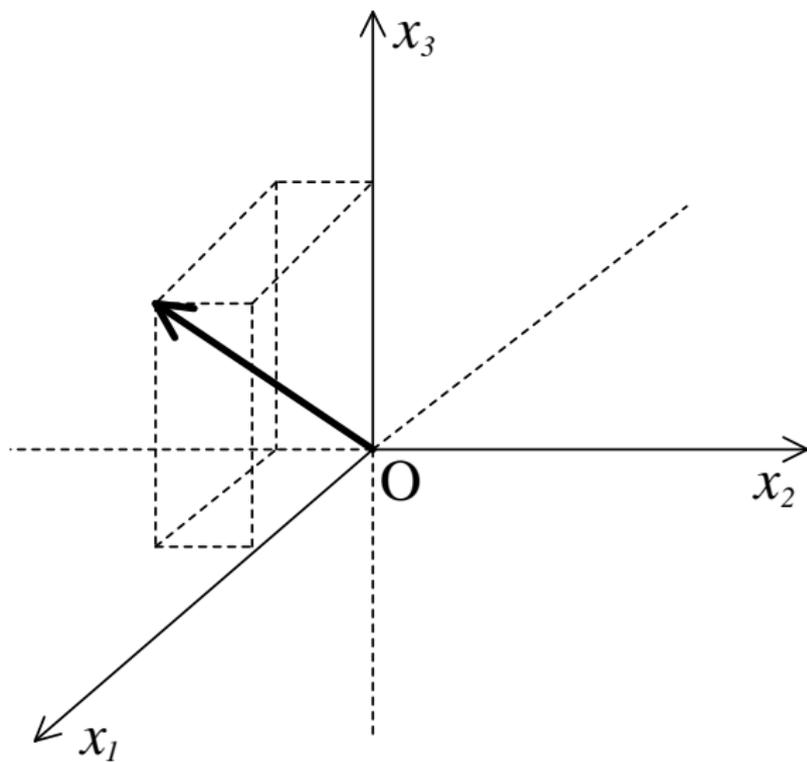
- 理学部数学科で扱う数学の考え方に触れる.
- 「証明」の感じをつかむ. 少しでも慣れる.
- 俺が **beamer** に慣れる.
(練習のために, このスライドは **beamer** という環境で作った.)
(学会とかでスタンダードなプレゼン環境なので,
卒研発表でぜひ使ってみよう!!)

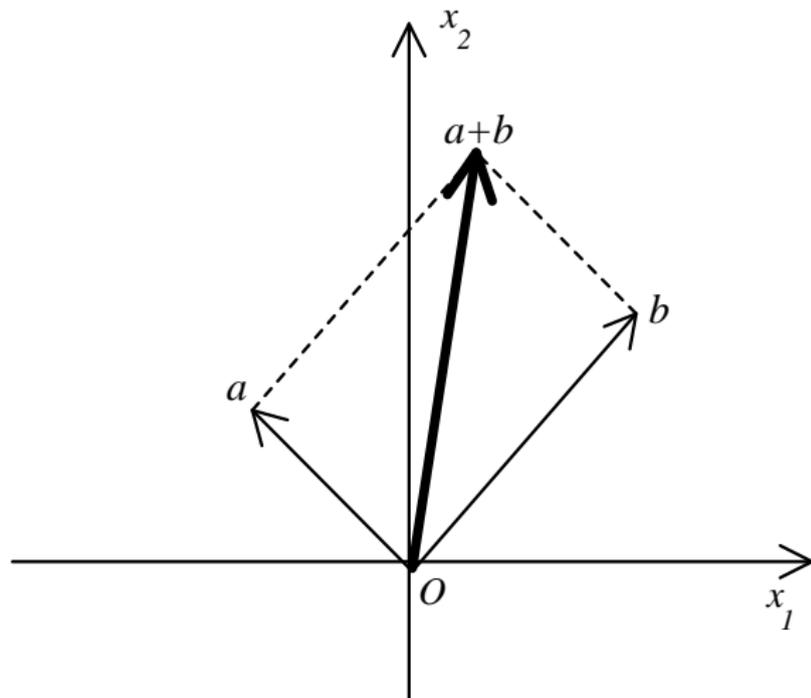
- ① はじめに
- ② 線形空間の定義
- ③ 線形空間の例
- ④ 線形独立, 線形従属
- ⑤ 基底

定義

$$\mathbb{R}^n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

$n = 3$ のときの例 (\mathbb{R}^3)



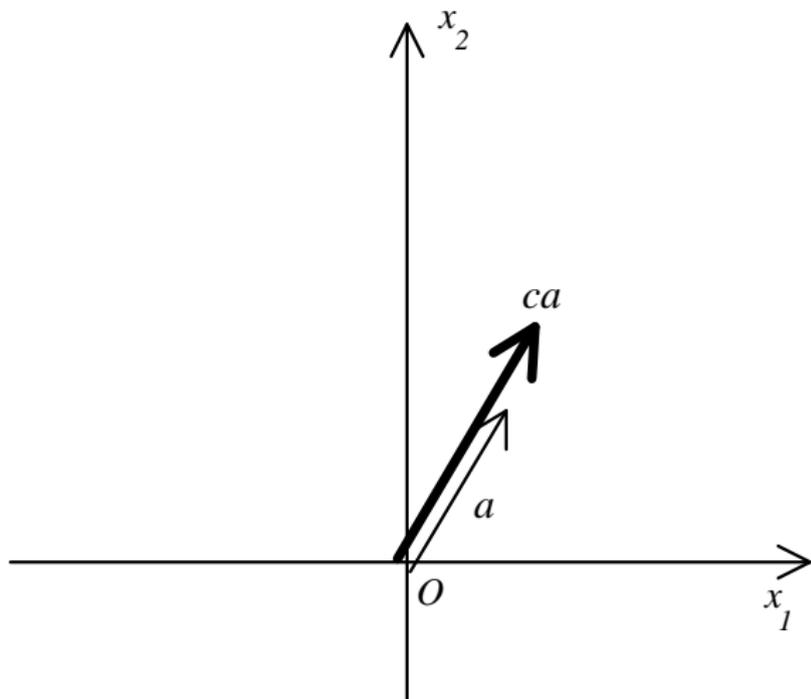


ベクトルの和はまたベクトル!!

これを数式で書いてみよう.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^n$$



ベクトルのスカラー (実数) 倍はまたベクトル!!

これを数式で書いてみよう.

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow ca \in \mathbb{R}^n.$$

命題

- $\forall a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^n$.
(\mathbb{R}^n は和について閉じている)
- $\forall a \in \mathbb{R}^n, \forall c \in \mathbb{R} \Rightarrow ca \in \mathbb{R}^n$.
(\mathbb{R}^n はスカラー (実数) 倍について閉じている)

さらに, 次のような細かい性質もすぐに調べれば分かる.

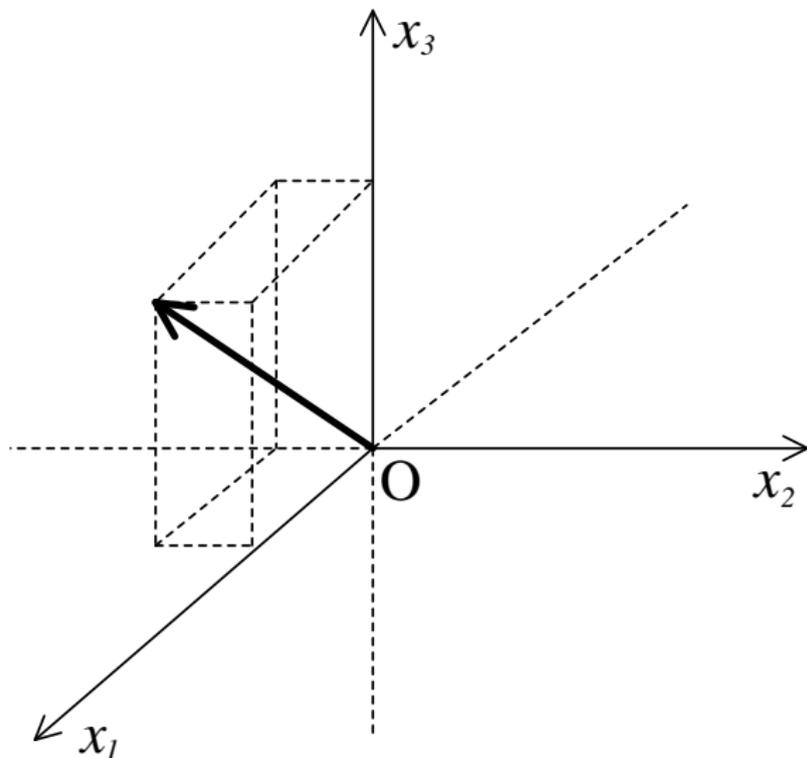
(8つの代数的性質)

命題

- 和について...
 - $\exists 0 \in \mathbb{R}^n$ s.t. $\forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a$. (ゼロベクトル)
 - $\forall a \in \mathbb{R}^n, \exists (-a) \in \mathbb{R}^n$ s.t. $a + (-a) = (-a) + a = 0$. (和の逆元)
 - $\forall a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + b = b + a$. (可換)
 - $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$. (結合法則)
- スカラー倍について...
 - $\forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow 1a = a$. (1倍しても変わらない)
 - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ (分配法則)
 - $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ (分配法則)
 - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$.

「公理化」という考え方

いままで、ベクトルとは、向きと大きさを持った量 (矢印) のことだった.



「公理化」という考え方

んで、その「矢印」としての「ベクトル」は、
「さっきみたいな性質」を満たしてた。

命題

- $\forall a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^n$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^n, \forall c \in \mathbb{R} \Rightarrow ca \in \mathbb{R}^n$.
- $\exists 0 \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a$. (ゼロベクトル)
- $\forall a \in \mathbb{R}^n, \exists (-a) \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } a + (-a) = (-a) + a = 0$. (和の逆元)
- $\forall a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + b = b + a$. (可換)
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$. (結合法則)
- $\forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow 1a = a$. (1倍しても変わらない)
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ (分配法則)
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ (分配法則)
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$.

今までの流れ

ベクトル \Rightarrow さっきの性質を満たす!!
(「ベクトル」というものが, 「矢印」として最初からある!!)

「公理化」という考え方

逆に考えるんだ

「さっきの性質を満たすなら、それはベクトルだ」

と考えるんだ

「公理化」という考え方

つまり、「さっきの性質」を満たすものは...

超重要 point!!

別に矢印じゃなかろうが、すべて「ベクトル」だと呼ぶことにしよう!!

という発想の転換をする.

定義

ある集合 V が次の性質を満たすとき, V は \mathbb{R} -線形空間 (\mathbb{R} -linear space) であるという.

- $\forall a, b \in V \Rightarrow a + b \in V$.
(V は和について閉じている)
- $\forall a \in V, \forall c \in \mathbb{R} \Rightarrow ca \in V$.
(V はスカラー (実数) 倍について閉じている)

8つの代数的性質

定義

- 和について...
 - $\exists 0 \in V \text{ s.t. } \forall a \in V \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a.$ (ゼロベクトル)
 - $\forall a \in V, \exists (-a) \in V \text{ s.t. } a + (-a) = (-a) + a = 0.$ (和の逆元)
 - $\forall a, b \in V \Rightarrow a + b = b + a.$ (可換)
 - $\forall a, b, c \in V \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c).$ (結合法則)
- スカラー倍について...
 - $\forall a \in V \Rightarrow 1a = a.$ (1倍しても変わらない)
 - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in V \Rightarrow (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ (分配法則)
 - $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a, b \in V \Rightarrow \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ (分配法則)
 - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in V \Rightarrow (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a).$

そして、線形空間 V の元のことをベクトル (**vector**) と呼ぶ。

「公理化」という考え方

\mathbb{R}^n から重要な性質だけを抽出

⇒ それを新たな定義 (公理) とした.

大切な考え方

数学ではこれを公理化という.

- \mathbb{R} -線形空間は, \mathbb{R}^n の公理化!!

んで、何が嬉しいのか？

線形空間を考えて嬉しいこと

今まで考えもしなかったものがベクトルに見える!!

定義

$$M_2(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j \in \{1, 2\} \right\}.$$

たとえば,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi & e \\ e & \pi \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

$$c \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

さらに、**8つの代数的性質**も満たす。

∴ $M_2(\mathbb{R})$ は \mathbb{R} -線形空間なので、実係数の2次行列は**ベクトル!!**
(n 次の場合についても、同様に \mathbb{R} -線形空間といえる.)

定義

$$C^1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) \mid f(x) \text{ は少なくとも } 1 \text{ 回微分可能.}\}$$

たとえば,

$$x, \sin x, e^x \in C^1(x).$$

$\forall f(x), g(x) \in C^1(x), c \in \mathbb{R}$ としよう.

$$f(x) + g(x) \in C^1(x).$$

$\therefore (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ なので,
 $f(x) + g(x)$ も少なくとも 1 回微分可能.

$$cf(x) \in C^1(x).$$

$\therefore (cf(x))' = cf'(x)$ なので, $cf(x)$ も少なくとも 1 回微分可能.

さらに, **8 つの代数的性質**も満たす.

$\therefore C^1(x)$ は \mathbb{R} -線形空間なので,
「少なくとも 1 回微分可能な実関数」はベクトル!!

次の定数係数 2 階斉次線形微分方程式を考える.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0.$$

また, この微分方程式の解空間 S を考える.

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{y(x) \mid y(x) \text{ is solution of } \uparrow\}$$

$\forall y_1, y_2 \in S$ としよう.

$$\begin{aligned} & \frac{d^2(y_1 + y_2)}{dx^2} + a \frac{d(y_1 + y_2)}{dx} + b(y_1 + y_2) \\ = & \left(\frac{d^2 y_1}{dx^2} + a \frac{d y_1}{dx} + b y_1 \right) + \left(\frac{d^2 y_2}{dx^2} + a \frac{d y_2}{dx} + b y_2 \right) \\ = & 0 + 0 \\ = & 0. \end{aligned}$$

$\therefore y_1 + y_2$ もやっぱり解なので, $y_1 + y_2 \in S$.

定数係数 2 階斉次線形微分方程式の解 is vector

$\forall c \in \mathbb{R}$ としよう.

$$\begin{aligned} & \frac{d^2(cy_1)}{dx^2} + a \frac{d(cy_1)}{dx} + b(cy_1) \\ &= c \left(\frac{d^2y_1}{dx^2} + a \frac{dy_1}{dx} + by_1 \right) \\ &= c \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\therefore cy_1$ もやっぱり解なので, $cy_1 \in S$.

さらに, **8 つの代数的性質**も満たす.

$\therefore S$ は \mathbb{R} -線形空間なので,

「定数係数 2 階斉次線形微分方程式の解」はベクトル!!

つまり...

今まで高専でやってきた線形代数は...

ただの「 \mathbb{R}^n バージョン」でしかなかったのだ!!!!

復習

$v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ が**線形独立 (linearly independent)** であるとは,
線形関係式 (linearly relation)

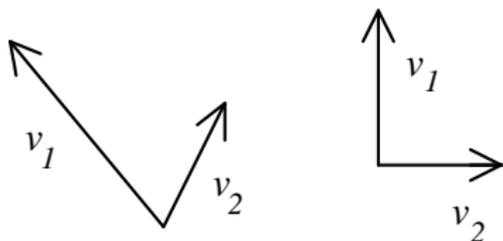
$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0.$$

を満たすような $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ が,

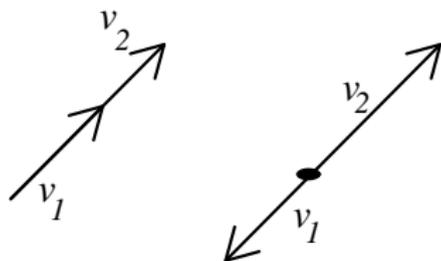
$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

に限るときのことをいった。また, v_1, v_2, \dots, v_n が**線形独立でないこと**を,**線形従属 (linearly dependent)** といった。

線形独立, 線形従属



linearly independent



linearly dependent

この「線形独立, 線形従属」の定義を, そのまま線形空間でも使おう!!

定義

$v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ が線形独立 (linearly independent) であるとは, 線形関係式 (linearly relation)

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0.$$

を満たすような $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ が,

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

に限るときのことをいう. また, v_1, v_2, \dots, v_n が線形独立でないことを, 線形従属 (linearly dependent) という.

Example. 行列の線形独立

この定義によって、「行列」が線形独立かどうかとか、「関数」が線形独立かどうかとかを調べられる。

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

この2つの行列は線形独立? 線形従属?

こういうときは、とにかく定義にしたがって、線形関係式!!

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

左辺をまとめてみると、

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

各成分を比較すると、 $c_1 = 0, c_2 = 0$ なので、**線形独立!!** □

Example. 関数の線形独立

例

$$e^x, e^{2x}, e^{3x} \in C^1(x).$$

この3つの関数は線形独立? 線形従属?

線形関係式

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = 0.$$

これだけだと c_1, c_2, c_3 は分からないので

秘技 「微分」 で関係式を増やす!!

Example. 関数の線形独立

微分で関係式を3本にしてみよう.

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = 0.$$

$$c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} + 3c_3 e^{3x} = 0.$$

$$c_1 e^x + 4c_2 e^{2x} + 9c_3 e^{3x} = 0.$$

行列でかくと

$$\begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Example. 関数の線形独立

復習

行列表示された連立方程式

$$Ax = b.$$

が自明な解 $x = 0$ のみを持つ $\iff \det A \neq 0!!$

Example. 関数の線形独立

さっきの係数行列の行列式を計算してみると,

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0.$$

よって, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ と分かるので, e^x, e^{2x}, e^{3x} は線形独立!! □

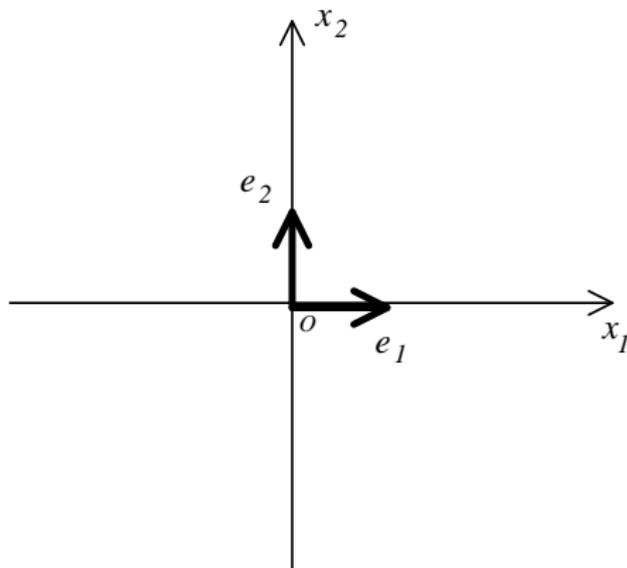
詳しくは触れないけど

こうして作る係数行列は **Wronski 行列 (Wronskian)** と呼ばれている.

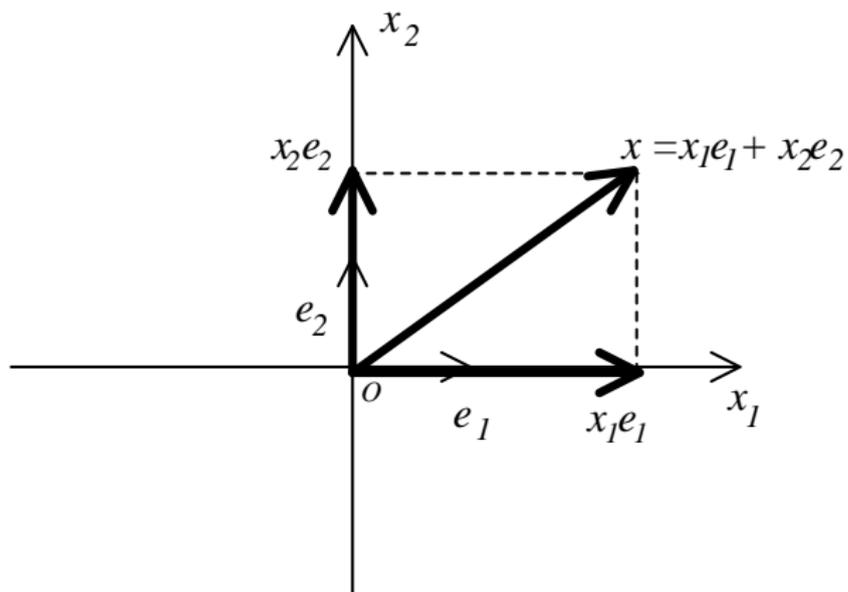
基底

(あ, この話は編入試験で頻出だよ)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$



$e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ は...

次のような性質を持っていた

- ① $\forall x \in \mathbb{R}^2$ が, e_1, e_2 を使って

$$x_1 e_1 + x_2 e_2$$

の形 (e_1, e_2 の線形結合) で表せる.

- ② e_1, e_2 は線形独立.

こんな性質を持つベクトルの組のことを, \mathbb{R}^2 の**基底 (basis)** と呼んだ.

ということで、基底の定義の復習

ベクトルの組 v_1, v_2, \dots, v_k が \mathbb{R}^n の基底 (**basis**) であるとは、 v_1, v_2, \dots, v_k が次の条件を満たすことである。

- ① $\forall v \in \mathbb{R}^n$ が、

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k.$$

という形 (v_1, v_2, \dots, v_k の線形結合) で表せる。

- ② v_1, v_2, \dots, v_k は線形独立.

ということで、基底の定義の復習

基底の取り方は色々考えられるが、基底の個数はどう取っても必ず一定。その基底の数を、 \mathbb{R}^n の次元 (**dimension**) と呼び、 $\dim \mathbb{R}^n$ と表す。

$$\dim \mathbb{R}^n = n.$$

この定義も、線形空間に流用しよう!!

定義

ベクトルの組 v_1, v_2, \dots, v_k が \mathbb{R} -線形空間 V の**基底 (basis)** であるとは、 v_1, v_2, \dots, v_k が次の条件を満たすことである。

- ① $\forall v \in V$ が、

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k.$$

という形 (v_1, v_2, \dots, v_k の**線形結合**) で表せる。

- ② v_1, v_2, \dots, v_k は**線形独立**。

基底の個数は一定となり、 V の**次元 (dimension)** と呼び、 $\dim V$ と書く。

例：行列の基底

$\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ が $M_2(\mathbb{R})$ の基底であることを示せ.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

示せば良いことは2つ!!

- ① $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ は線形独立であること.
- ② $\forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が,

$$A = c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3 + c_4 E_4.$$

と書けること.

例：行列の基底

線形独立であることを示そう。

$$c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3 + c_4 E_4 = O.$$

左辺を成分ごとに整理して書くと、

$$\begin{pmatrix} c_1 - c_4 & c_2 - c_3 \\ c_2 + c_3 & c_1 + c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

成分ごとに両辺を比較すると、

$$\begin{cases} c_1 - c_4 = 0 \\ c_2 - c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_4 = 0. \end{cases}$$

⇒ あとはこれをとけば、 $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ を得る!!

例：行列の基底

$$\forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ として,}$$

$$A = c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3 + c_4 E_4.$$

と置く. 両辺を成分ごとに整理して, 連立方程式をつくると,

$$\begin{cases} c_1 - c_4 = a_{11} \\ c_2 - c_3 = a_{12} \\ c_2 + c_3 = a_{21} \\ c_1 + c_4 = a_{22}. \end{cases}$$

例：行列の基底

これを解くと、次の解を得る.

$$c_1 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}, c_2 = \frac{a_{12} + a_{21}}{2}, c_3 = \frac{a_{21} - a_{12}}{2}, c_4 = \frac{a_{22} - a_{11}}{2}.$$

この通りに c_1, c_2, c_3, c_4 を取れば,

$$A = c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3 + c_4 E_4.$$

と書けるので、 $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の基底!! \square